

УДК 681.326.74.06

ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕГРАЛА ДЮАМЕЛЯ У АНАЛІЗІ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ТА ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ ПРУЖНИХ ЗВ'ЯЗКІВ МЕХАНІЗМІВ ПІДЙОМУ ВАНТАЖУ КРАНІВ ПРИ ЇХ ПУСКУ

Юрій Човнюк¹, Михайло Діктерук², Світлана Комоцька²¹ Національний університет біоресурсів і природокористування України, вул. Героїв Оборони, 12в, Київ, Україна, e-mail: ychovnyuk@ukr.net² Київський національний університет будівництва і архітектури, Повітрофлотський просп., 31, Київ, Україна

DUHAMEL'S INTEGRAL USING FOR ANALYSIS OF FORCED VIBRATIONS AND OF ELASTIC CONNECTIONS' DYNAMIC LOADS IN CRANE'S LIFTING MECHANISMS DURING THEIR "START-UP"

Yuriy Chovnyuk¹, Mykhaylo Dykteruk², Svetlana Komotskaya²¹ National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Heroyiv Oborony st., 12v, Kyiv, Ukraine, e-mail: ychovnyuk@ukr.net² Kyiv National University of Construction and Architecture, Povitroflotsky Prospect, 31, Kyiv, Ukraine

АНОТАЦІЯ. Обґрунтована модель вимушених коливань пружних зв'язків (канатів) механізмі підйому вантажу кранів у період їх пуску, яка використовує інтеграл Дюамеля й дозволяє аналізувати динамічні навантаження у вказаних зв'язках. Для проведення динамічного аналізу використані різні варіанти зовнішнього навантаження: імпульсне, миттєве, лінійно зростаюче у часі, негармонічне періодичне збудження та обчислені відповідні коефіцієнти динамічності.

Ключові слова: інтеграл Дюамеля, аналіз, вимушені коливання, динаміка, навантаження, пружні зв'язки, канати, механізми, підйом, вантаж, крани, пуск.

АННОТАЦИЯ. Обоснована модель вынужденных колебаний упругих связей (канатов) механизмов подъема груза кранов в период их пуска, которая использует интеграл Дюамеля и позволяет анализировать динамические нагрузки в указанных связях. Для проведения динамического анализа использованы различные варианты внешней нагрузки: импульсное, мгновенное, линейно растущее во времени, негармоническое периодическое возбуждение и вычислены соответствующие коэффициенты динамичности.

Ключевые слова: интеграл Дюамеля, анализ, вынужденные колебания, динамика, нагрузка, упругие связи, канаты, механизмы, подъем, груз, краны, пуск.

ABSTRACT. Purpose. A model of forced oscillations of elastic connections (ropes) for crane's lifting mechanisms during their "start-up" is used. **Methodology/approach.** One may analyze these connections with the help of Duhamel's integral and their dynamic loads as well. In order to realize this dynamic analysis, one may use different models of external load, such as: impulsive, instantaneous, increasing linearly in time and nonharmonic periodic excitations. **Findings.** The dynamic coefficients for with types of load are calculated.

Key words: Duhamel's integral, analysis, forced vibrations, dynamics, load, elastic ropes, mechanisms, lifting, cargo, cranes "star-up".

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Змінна складова сил (чи моментів) при пружних коливаннях канатів механізмів підйому вантажу кранів може бути настільки великою, що сумарні миттєві значення їх суттєво перевищують статичні та інерційні навантаження й можуть призвести до розривів пружних зв'язків, їх перевантажень, особливо у пусковому періоді. У багатьох механізмах піднімально-

транспортних машин динамічні навантаження відіграють вирішальну роль. Дії змінних сил є однією з основних причин руйнування канатів внаслідок їх втомлення. Практично 90% руйнувань вказаних пружних зв'язків механізмів підйому вантажу кранів мають саме характер втомлюваного руйнування, і відбуваються вони у результаті дії змінних динамічних навантажень.

Розрахунок динамічних навантажень у канатах механізмів підйому вантажу кранів

містить наступні основні етапи: 1) складання розрахункових зведених чи еквівалентних схем механізму; 2) визначення величини й характеру зміни зовнішніх навантажень, прикладених до системи; 3) визначення жорсткості пружних зв'язків (канатів); 4) складання диференціальних рівнянь руху мас системи; 5) знаходження пружних сил (і моментів) у ланцюгах механізму підйому вантажу (тобто у приводі й у місці кріплення вантажу до каната). Зазвичай, механізм підйому вантажу крана складається з великого числа зосереджених й розподілених мас, внаслідок чого теоретичне дослідження такої системи стає доволі складним чи взагалі неможливим. Тому реальну систему по можливості замінюють простою зведеною розрахунковою схемою з невеликою кількістю мас (наприклад, двомасовою пружною системою при її поступальному русі).

Не зважаючи на вказані вище можливості спрощеного моделювання та динамічного аналізу механізмів підйому вантажу кранів, на думку авторів даного дослідження, проблема адекватного визначення, наприклад, коефіцієнтів динамічності у період пуску вказаних вище механізмів залишається, особливо за наявності змінних навантажень приводу чи сил опору рухові вантажу, і вимагає подальшого дослідження.

АНАЛІЗ ПУБЛІКАЦІЙ ПО ТЕМІ ДОСЛІДЖЕННЯ

У роботах [1-10] викладені основи теорії коливань лінійних та нелінійних механічних систем, а також застосування загальних методів до динамічного розрахунку різноманітних машин та конструкцій. Розглянуті коливання, викликані детермінованими й випадковими змінними навантаженнями, а також ударом чи періодичною зміною параметрів системи. Значна увага приділена й чисельно-аналітичним методам розрахунку із застосуванням ПЕОМ. Проте відсутні дослідження, які базуються на використанні інтеграла Дюамеля задля динамічного аналізу вимушених коливань та навантажень, які виникають у пружних зв'язках

(канатах) механізмів підйому вантажу кранів у процесах їх пуску.

МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

Мета дослідження полягає у обґрунтуванні методу інтеграла Дюамеля для аналізу вимушених коливань та динамічних навантажень пружних зв'язків (канатів) механізмів підйому вантажу кранів при їх пуску задля мінімізації коефіцієнта динамічності вказаних механізмів у перехідних процесах.

ВИКЛАД ЗМІСТУ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо динамічні навантаження у двомасовій системі з лінійною жорсткістю C й масами m_1 та m_2 , на які діють рушійні сили $P(t)$ та сили опору $Q(t)$ (рис.1).

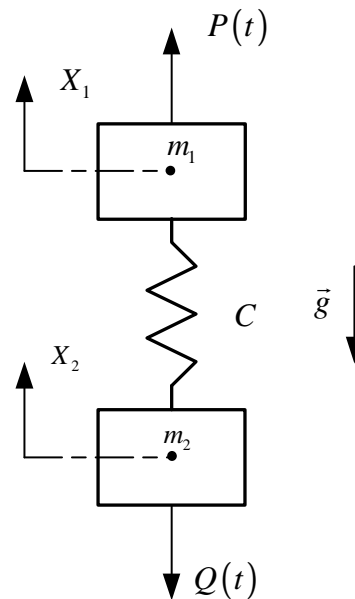


Рис. 1. Схема двомасової пружної системи при її поступальному русі (\vec{g} – вектор прискорення вільного падіння)

Fig. 1. Scheme of two-mass elastic system in its forward movement (\vec{g} – vector of acceleration of gravity)

До такої системи можна віднести механізми підйому вантажу кранів, де жорсткості канатів поліспаствів набагато менше жо-

рсткості самого приводу, стрічкові та ланцюгові конвеєри та ін. Під дією зовнішніх сил, змінних у часі t , у неусталений період руху таких механічних систем, в їх пружній частині (наприклад, канатах) виникають доволі інтенсивні коливні процеси.

Диференціальні рівняння руху мас у перехідний період роботи механізму мають наступний вигляд:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} + C(x_1 - x_2) = P(t), \\ m_2 \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} - C(x_1 - x_2) = -Q(t), \end{cases} \quad (1)$$

де x_1 , x_2 – переміщення відповідно першої (приводу) та другої (вантажу) мас; $Q(t)$ беремо зі знаком мінус як силу опору.

У рівняннях (1) перші складові – сили інерції відповідної маси, другі – сили пружності у зв'язках. У правій частині рівнянь – сили $P(t)$, $Q(t)$, діючі на систему у період її неусталеного руху.

Після нескладних перетворень (1) й введення координати $x = (x_1 - x_2)$ – різниці переміщень мас, замість двох рівнянь з (1) отримаємо одне для x :

$$\ddot{x} + \Omega^2 \cdot x = S(t), \quad \ddot{x} = d^2 x / dt^2, \quad (2)$$

де

$$\Omega^2 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot C}{m_1 \cdot m_2}, \quad S(t) = \frac{m_2 \cdot P(t) + m_1 \cdot Q(t)}{m_1 \cdot m_2}.$$

Диференціальне рівняння (2) характеризує деформацію пружного ланцюга (канату) або динамічне зусилля, яке виникає у ньому у зв'язку з тим, що

$$P_{\text{дин}}(t) = C \cdot (x_1 - x_2) = C \cdot x(t). \quad (3)$$

Загальний розв'язок (2) як неоднорідного диференціального рівняння має наступний вигляд:

$$x = x_* + C_1 \cos(\Omega \cdot t) + C_2 \sin(\Omega \cdot t), \quad (4)$$

де x_* – частинний розв'язок (2), а інші складові (4), які стоять справа, є загальним розв'язком однорідного рівняння, котре можна легко отримати з (2) при нульовому значенні правої частини. $C_{1,2}$ – константи, які можна знайти з початкових умов задачі.

Для $P_d(t)$ (3) із врахуванням (4) маємо

$$P_{\text{дин}}(t) = C [x_* + C_1 \cos(\Omega t) + C_2 \sin(\Omega t)] \quad (5)$$

У виразі (5) – Ω кругова частота власних коливань системи, s^{-1} . Період власних коливань T визначається наступним чином:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}. \quad (6)$$

Для визначення констант $C_{1,2}$ необхідно встановити початкові умови.

Випадок 1. Якщо початкові умови мають вигляд

$$\dot{x}(t)|_{t=0} = 0, \quad P_{\text{дин}}(t)|_{t=0} = 0 \Leftrightarrow x(t)|_{t=0} = 0, \quad (7)$$

то

$$\begin{aligned} C_1 &= -x_*(t)|_{t=0} = \tilde{x}_*; \\ C_2 &= -\frac{\dot{x}_*(t)|_{t=0}}{\Omega} = -\frac{1}{\Omega} \cdot \dot{\tilde{x}}_*. \end{aligned} \quad (8)$$

Цей випадок відповідає т. з. підйому вантажу «з підхватом».

Для переміщення $x(t)$ й $P_{\text{дин}}(t)$ маємо

$$\begin{aligned} x(t) &= x_*(t) - \tilde{x}_* \cdot \cos(\Omega t) - \\ &-\frac{1}{\Omega} \cdot \dot{\tilde{x}}_* \cdot \sin(\Omega t), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} P_{\text{дин}}(t) &= C \cdot x_*(t) - C \cdot \tilde{x}_* \cos(\Omega t) - \\ &-\frac{C}{\Omega} \cdot \dot{\tilde{x}}_* \sin(\Omega t). \end{aligned} \quad (10)$$

Випадок 2. Якщо до початку пуску система знаходилась під навантаженням (т. з. підйом вантажу «з ваги»), то початкові умови будуть наступними:

$$\dot{x}(t)|_{t=0} = \frac{Q(0)}{C}, \quad \dot{x}(t)|_{t=0} = 0. \quad (11)$$

Тоді

$$C_1 = \frac{Q(0)}{C} - \tilde{x}_*; \quad C_2 = -\frac{1}{\Omega} \cdot \dot{\tilde{x}}_*. \quad (12)$$

Отже, для $x(t)$ й $P_{\text{дин}}(t)$ у другому випадку маємо

$$\begin{aligned} x(t) &= x_*(t) - \tilde{x}_* \cdot \cos(\Omega t) + \frac{Q(0)}{C} \cos(\Omega t) - \\ &-\frac{1}{\Omega} \cdot \dot{\tilde{x}}_* \cdot \sin(\Omega t), \end{aligned} \quad (13)$$

$$P_{\text{дин}}(t) = C \cdot x_*(t) - C \cdot \tilde{x}_* \cos(\Omega t) + Q(0) \cos(\Omega t) - \frac{C}{\Omega} \cdot \dot{\tilde{x}}_* \sin(\Omega t). \quad (14)$$

Повне переміщення $x_*(t)$ у момент t можна подати у вигляді інтеграла Дюамеля [8]:

$$x_*(t) = \int_0^t S(\theta) \cdot Y(t-\theta) d\theta, \quad (15)$$

де $Y(t)$ – реакція системи на одиничний імпульс

$$Y(t) = \frac{1}{\Omega} \cdot \sin(\Omega t). \quad (16)$$

Тоді вирази $x_*(t)$, $\dot{x}_*(t)$, $\ddot{x}_*(t)$ можна подати наступним чином:

$$x_*(t) = \frac{1}{\Omega} \cdot \int_0^t S(\theta) \cdot \sin[\Omega(t-\theta)] d\theta, \quad (17)$$

$$\dot{x}_*(t) = \int_0^t S(\theta) \cdot \cos[\Omega(t-\theta)] d\theta \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_*(t) &= S(t) - \Omega^2 \cdot x_*(t) = \\ &= S(t) - \Omega \int_0^t S(\theta) \cdot \sin[\Omega(t-\theta)] d\theta. \end{aligned} \quad (19)$$

Виходячи з (17) та (18), маємо

$$\tilde{x}_* = 0, \quad \dot{\tilde{x}}_* = 0. \quad (20)$$

Тоді вирази $P_{\text{дин}}(t)$ й $x(t)$ для різних випадків підйому вантажу набувають вигляду:

а) перший випадок

$$x(t) = x_*(t) = \frac{1}{\Omega} \int_0^t S(\theta) \sin[\Omega(t-\theta)] d\theta, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} P_{\text{дин}}(t) &= C \cdot x_*(t) = \\ &= \frac{C}{\Omega} \cdot \int_0^t S(\theta) \cdot \sin[\Omega(t-\theta)] d\theta; \end{aligned} \quad (22)$$

б) другий випадок

$$\begin{aligned} x(t) &= x_*(t) + \frac{Q(0)}{C} \cdot \cos(\Omega t) = \\ &= \frac{1}{\Omega} \cdot \int_0^t S(\theta) \cdot \sin[\Omega(t-\theta)] d\theta + \\ &+ \frac{Q(0)}{C} \cdot \cos(\Omega t), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} P_{\text{дин}}(t) &= C \cdot x(t) = \\ &= \frac{C}{\Omega} \cdot \int_0^t S(\theta) \cdot \sin[\Omega(t-\theta)] d\theta + \\ &+ Q(0) \cdot \cos(\Omega t). \end{aligned} \quad (24)$$

Коефіцієнт динамічності розглядуваної системи має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} K_{\text{дин}}(t) &= \frac{P_{\text{дин}}(t)}{\left\{ \frac{m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)} \cdot S(0) \right\}} = \\ &= \frac{P_{\text{дин}}(t)}{\left\{ \frac{m_2 \cdot P(0) + m_1 \cdot Q(0)}{(m_1 + m_2)} \right\}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Для кожного із зазначених вище випадків маємо

$$K_{\text{дин}}^{(1)}(t) = \frac{\left(\frac{C}{\Omega} \right) \int_0^t S(\theta) \cdot \sin[\Omega \cdot (t-\theta)] d\theta}{\left[\frac{m_2 \cdot P(0) + m_1 \cdot Q(0)}{(m_1 + m_2)} \right]}; \quad (26)$$

$$\begin{aligned} K_{\text{дин}}^{(2)}(t) &= \left(\frac{C}{\Omega} \right) \cdot \\ &\frac{\int_0^t S(\theta) \cdot \sin[\Omega(t-\theta)] d\theta + Q(0) \cos(\Omega t)}{\left[\frac{m_2 P(0) + m_1 Q(0)}{(m_1 + m_2)} \right]}. \end{aligned} \quad (27)$$

У першому випадку при підйомі вантажу «з підхватом» маємо

$$\begin{cases} P(t) = (m_1 + m_2) \cdot a_i(t) + m_2 g; \\ P(0) = (m_1 + m_2) \cdot a_i(0) + m_2 g; Q(t) = 0. \\ Q_0 \cdot \frac{t}{\tau_0}, 0 \leq t \leq \tau_0; \\ Q_0, t \geq \tau_0. \end{cases} \quad (28)$$

У (28) $Q_0 = m_2 g$, g – прискорення вільного падіння, τ_0 – тривалість контакту вантажу з основою при т. з. підйомі вантажу «з землі» [11], яка визначається зі співвідношення

$$\tau_0 = \frac{m_2 g}{C \cdot v_0}, \quad (29)$$

де v_0 – швидкість, з якою відбувається усталений рух маси m_2 (у процесі підйому

вантажу, коли усі перехідні процеси закінчилися). Стосовно $a_i(t)$ при $i = \overline{(1,4)}$ зазначимо, що ці значення прискорень наведені у [7] і відповідають певним (оптимальним) режимам функціонування привідного механізму підйому вантажу крана, зокрема,

$$\begin{cases} a_1(t) = \frac{v_0}{t_n}; a_2(t) = \frac{v_0}{t_n} \left(1 - \frac{t}{t_n}\right); \\ a_3(t) = 12 \frac{v_0 t}{t_n^2} \left(1 - \frac{t}{t_n}\right)^2; \\ a_4(t) = 60 \frac{v_0}{t_n} \left(\frac{t}{t_n}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{t}{t_n}\right)^3. \end{cases} \quad (30)$$

У (30) t_n – тривалість перехідного процесу (пуску) розглядуваної системи.

У другому випадку при підйомі вантажу «з ваги» маємо

$$\begin{cases} P(t) = (m_1 + m_2) \cdot a_i(t) + m_2 g; \\ P(0) = (m_1 + m_2) \cdot a_i(0) + m_2 g; \\ Q(t) = Q(0) = m_2 g. \end{cases} \quad (31)$$

Таким чином, виразами (28) – (31) однозначно визначені $P(t)$, $Q(t)$, $P(0)$, $Q(0)$ для кожного режиму функціонування вантажопідйомного механізму крана при $i = \overline{(1,4)}$. Так само визначена і величина

$$S(t) = \frac{P(t)}{m_1} + \frac{Q(t)}{m_2}.$$

Знаючи їх, можна легко визначити коефіцієнти динамічності

$K_{\text{дин}}^{(1,2)}$ з (26) й (27) навіть аналітичним шляхом.

Розглянемо кілька типових ситуацій для функції $S(t)$, які можна проаналізувати без використання ПЕОМ.

Спочатку подамо рівняння (2) у зручному для подальших досліджень вигляді:

$$\ddot{x} + \Omega^2 \cdot x = \frac{\bar{P}(t)}{m}, \quad (32)$$

$$\bar{P}(t) = S(t)m, m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Загальний розв’язок (32) можна подати наступним чином:

$$x(t) = x_0 \cos \Omega \cdot t + \frac{1}{\Omega} \dot{x}_0 \cdot \sin(\Omega t) + \frac{1}{\Omega m} \cdot \int_0^t \bar{P}(\theta) \cdot \sin[\Omega(t - \theta)] d\theta, \quad (33)$$

де: $x|_{t=0} = x_0$, $\dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0$. При цьому інтеграл Дюамеля (15) можна подати у вигляді

$$x_*(t) = \int_0^t \bar{P}(t - \theta) \cdot Y(\theta) d\theta = \frac{1}{\Omega m} \cdot \int_0^t \bar{P}(t - \theta) \cdot \sin[\Omega\theta] d\theta. \quad (34)$$

1. Миттєве навантаження. Нехай при $t = 0$ до нерухомої й недеформованої системи прикладається миттєво зростаюче й у подальшому таке, що зберігає постійне значення \bar{P}_0 , навантаження (рис.2). Тоді переміщення системи під дією миттєво прикладеного навантаження складає

$$x(t) = \frac{\bar{P}_0}{m\Omega^2} \cdot (1 - \cos \Omega t). \quad (35)$$

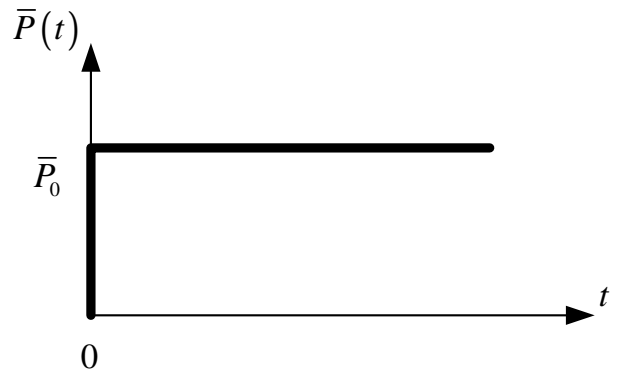


Рис. 2. Миттєво прикладене навантаження $\bar{P}(t)$

Fig. 2. Instantly applied load $\bar{P}(t)$

Оскільки $m \cdot \Omega^2 = C$ (жорсткість пружного зв’язку), то $\bar{P}_0 / (m\Omega^2) = x_{\text{ст}}$ становить статичну деформацію пружного зв’язку й з (35) випливає, що максимальне динамічне переміщення при миттєвому прикладанні навантаження вдвічі більше статичного. Графік залежності $x(t)$ наведений на рис.3, де $\bar{P}_0 / (m\Omega^2) = x_{\text{ст}}$.

Закон (35) для $x(t)$ можна подати у вигляді

$$x(t) = \frac{2\bar{P}_0}{m\Omega^2} \cdot \left(\sin^2 \left[\frac{\Omega t}{2} \right] \right). \quad (36)$$

На рис. 3. введено позначення $T = \frac{2\pi}{\Omega}$.

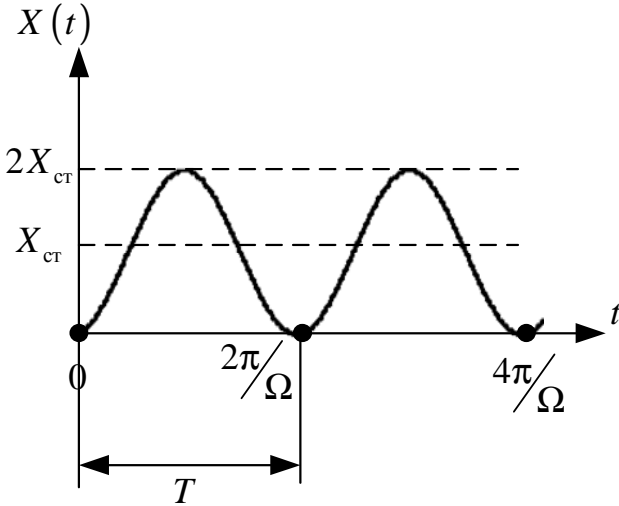


Рис. 3. Залежність $x(t)$ при миттєво прикладеному навантаженні

Fig. 3. Dependence $x(t)$ with instant load

Якщо ввести поняття коефіцієнта динамічності у вигляді

$$K_{\text{дин}}(t) = \frac{C \cdot x(t)}{C \cdot x_{\text{ст}}} \Leftrightarrow \frac{x(t)}{x_{\text{ст}}}, \quad (37)$$

$$K_{\text{дин}}(t) = \frac{x(t)}{x_{\text{ст}}},$$

то у цьому випадку при прикладанні миттєвого навантаження (рис. 2) маємо

$$K_{\text{дин}}(t) = 2 \sin^2 \left(\frac{\Omega(t)}{2} \right). \quad (38)$$

2. Лінійно зростаюче навантаження.

Закон зміни навантаження (рис. 4) задається формулою $\bar{P}(t) = k \cdot t$. Якщо це навантаження прикладається до нерухомої та недеформованої системи, то переміщення визначаються формулою (34)

$$x(t) = \int_0^t k(t-\theta) \cdot Y(\theta) d\theta = kY_2(t),$$

$$Y_2(t) = \int_0^t (t-\theta) \cdot Y(\theta) d\theta. \quad (39)$$

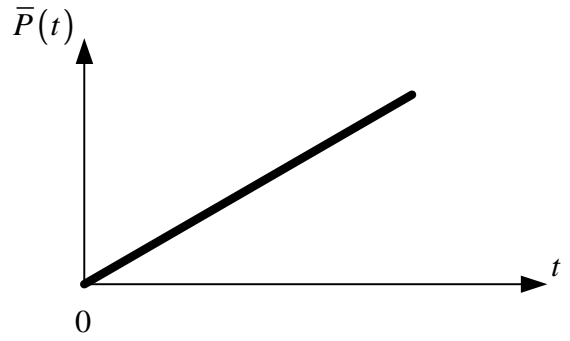


Рис. 4. Закон $\bar{P}(t) = kt$

Fig. 4. Law $\bar{P}(t) = kt$

Введемо позначення $Y_1(t) = \int_0^t Y(\theta) d\theta$,

$Y_2(t) = \int_0^t Y_1(\theta) d\theta$. Тоді переміщення $x(t)$,

викликані силою $\bar{P}(t) = kt$, визначаються виразом

$$x(t) = \frac{(kt)}{m\Omega^2} \cdot [1 - \sin(\Omega t) / (\Omega t)] = \frac{(kt)}{C} \cdot [1 - \sin(\Omega t) / (\Omega t)]. \quad (40)$$

При цьому $x_{\text{ст}}$ є переміщенням системи при $t = t_{\text{п}}$:

$$x_{\text{ст}} = \frac{k \cdot t_{\text{п}}}{C}. \quad (41)$$

У цьому випадку $K_{\text{дин}}(t)$ (37) має вигляд

$$K_{\text{дин}}(t) = \frac{(t)}{(t_{\text{п}})} \cdot [1 - \sin(\Omega t) / (\Omega t)]. \quad (42)$$

На рис. 5 наведено графічне відображення закону $x(t)$ (40).

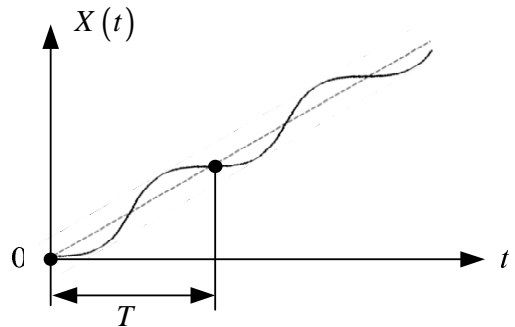


Рис. 5. Закон $x(t)$

Fig. 5. Law $x(t)$

На рис. 5 введено позначення $T = \frac{2\pi}{\Omega}$.

3. Постійна сила \bar{P}_0 , діюча на систему протягом часу $0 < t < \theta$ (рис. 6).

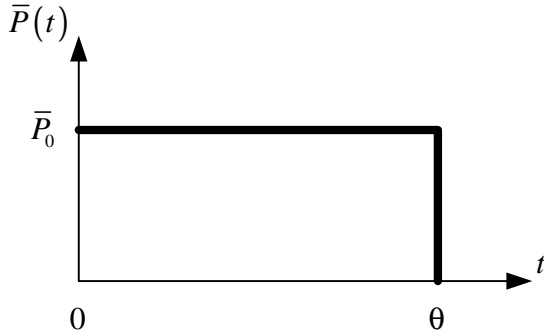


Рис. 6. Закон $\bar{P}(t)$

Fig. 6. Law $\bar{P}(t)$

Повне переміщення $x(t)$ при цьому складає:

а) при $0 \leq t \leq \theta$

$$x(t) = \bar{P}_0 \cdot Y_1(t) = \frac{\bar{P}_0}{C} (1 - \cos \Omega t); \quad (43)$$

б) при $t \geq \theta$

$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{P}_0 \cdot Y_1(t) - \bar{P}_0 \cdot Y_1(t - \theta) = \\ &= \frac{\bar{P}_0}{C} \cdot [\cos \{ \Omega(t - \theta) \} - \cos(\Omega t)] = \quad (44) \\ &= 2\bar{P}_0 C^{-1} \cdot \sin \left\{ \frac{\Omega \theta}{2} \right\} \cdot \sin \left\{ \Omega \left(t - \frac{\theta}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Вважаючи, що у цьому випадку $x_{ст} = \frac{\bar{P}_0}{C}$, з (43) й (44) для $K_{дин}(t)$ матимемо:

а) при $0 \leq t \leq \theta$

$$K_{дин}(t) = (1 - \cos \Omega t) = 2 \sin^2 \left(\frac{\Omega t}{2} \right); \quad (45)$$

б) при $t \geq \theta$

$$K_{дин}(t) = 2 \sin \left(\frac{\Omega \theta}{2} \right) \cdot \sin \left[\Omega \left(t - \frac{\theta}{2} \right) \right]. \quad (46)$$

З отриманих формул видно, що, якщо час, протягом якого прикладене навантаження θ більше половини періоду власних коливань системи ($\theta > \pi/\Omega$), то максимум переміщення $x_{max} = \frac{2\bar{P}_0}{C} = 2x_{ст}$ досягається

ще під час дії навантаження; якщо ж тривалість дії навантаження менше напівперіоду власних коливань, то максимальне переміщення досягається вже після закінчення дії навантаження. У цьому випадку

$$x_{max} = \frac{2\bar{P}_0}{C} \cdot \sin \left\{ \frac{\Omega \theta}{2} \right\} = 2x_{ст} \cdot \sin \left\{ \frac{\Omega \theta}{2} \right\}. \quad (47)$$

4. Навантаження зростає від нуля до \bar{P}_0 протягом часу θ й потім зберігає постійне значення (рис.7) [11].

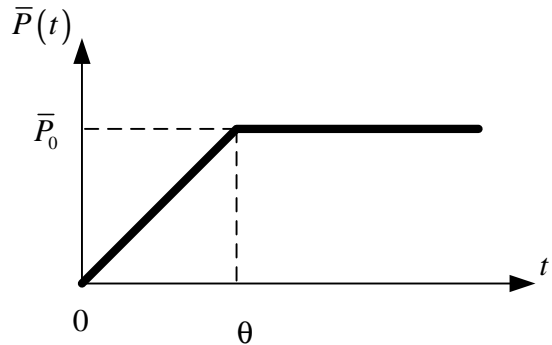


Рис. 7. Залежність $\bar{P}(t)$

Fig. 7. Dependence $\bar{P}(t)$

При цьому навантаження можна розглядати як сполучення двох лінійно зростаючих навантажень $\bar{P}_1(t) = \bar{P}_0 \cdot t / \theta$, яке прикладене, починаючи з $t = 0$, й $\bar{P}_2(t) = -\bar{P}_0 \cdot (t - \theta) / \theta$, прикладене, починаючи з $t = \theta$ (рис. 8).

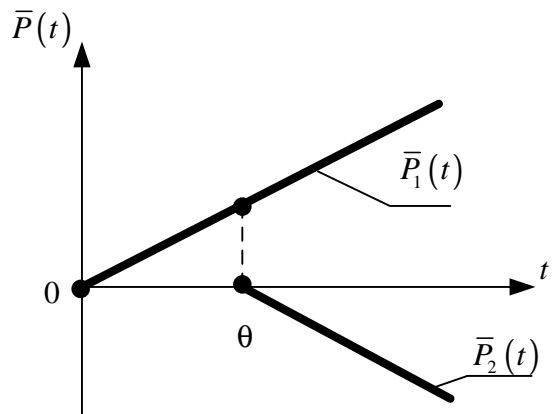


Рис. 8. $\bar{P}(t) = \bar{P}_1(t) + \bar{P}_2(t)$

Fig. 8. $\bar{P}(t) = \bar{P}_1(t) + \bar{P}_2(t)$

При $0 \leq t \leq \theta$

$$x(t) = \left(\frac{\bar{P}_0}{\theta} \right) Y_2(t) = \frac{\bar{P}_0}{(m\Omega^3\theta)} (\Omega t - \sin[\Omega t]), \quad (48)$$

а при $t > \theta$

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\frac{\bar{P}_0}{\theta} \right) \cdot [Y_2(t) - Y_2(t - \theta)] = \\ &= \frac{\bar{P}_0}{(m\Omega^3\theta)} [\Omega\theta - \sin(\Omega t) + \sin\{\Omega(t - \theta)\}]. \end{aligned} \quad (49)$$

Останню формулу подамо у вигляді

$$x(t) = x_{cr} \left[1 - 2 \cos \left\{ \Omega \left(t - \frac{\theta}{2} \right) \right\} \cdot \sin \{ \Omega\theta / 2 \} / (\Omega\theta) \right]. \quad (50)$$

$$\text{У (50) } x_{cr} = \bar{P}_0 [m\Omega^2]^{-1}.$$

Отже, для цього випадку маємо наступні коефіцієнти динамічності:

а) при $0 \leq t \leq \theta$

$$K_{дин}(t) = \frac{(\Omega t - \sin(\Omega t))}{(\Omega\theta)}, \quad (51)$$

б) при $t \geq \theta$

$$K_{дин}(t) = 1 - 2 \cos \left[\Omega \left(t - \frac{\theta}{2} \right) \right] \frac{\sin(\Omega\theta / 2)}{(\Omega\theta)}. \quad (52)$$

Друга складова у прямих дужках (50) становить відношення різниці між динамічним й статичним переміщеннями до статичного. Максимальне значення цієї величини складає

$$\left[(x - x_{cr}) / x_{cm} \right]_{max} = 2 \sin \left(\frac{\Omega\theta}{2} \right) / (\Omega\theta). \quad (53)$$

Це значення тим менше, чим триваліший час зростання навантаження (θ) у порівнянні з періодом власних коливань системи $T = 2\pi/\Omega$.

У наведених простих задачах можна було б отримати результат і не користуючись методом суперпозиції, однак при розрахунку нестационарних процесів у більш складних лінійних системах цей метод дає значні переваги. Крім того, зрозуміло, що $K_{дин}(t)$ має коливний характер й при певних умовах перевищує 1. Визначимо умови, за яких $K_{дин}(t)$ прийматиме мінімальні значення протягом $0 \leq t \leq t_n$. Для цьо-

го замість системи (1) використовуємо одне диференціальне рівняння для $x_2(t)$

$$x_2^{(IV)} + \Omega^2 \cdot \ddot{x}_2 = \frac{P(t) - Q(t)}{\left[\frac{m_1 m_2}{C} \right]}, \quad (54)$$

де $P(t)$ визначається із співвідношення

$$P(t) = (m_1 + m_2) \cdot a_i(t) + Q(t), \quad (55)$$

де $a_i(t)$ визначається співвідношеннями (30), а $Q(t)$ залежить від методу підйому вантажу (28) чи (31). Застосування сучасних мехатронних систем керування процесом підйому вантажу крана дозволяє реалізувати закон $P(t)$ руху приводу механізму підйому вантажу. З урахуванням (55) рівняння (54) набирає вигляду

$$x_2^{(IV)} + \Omega^2 \cdot \ddot{x}_2 = \Omega^2 \cdot a_i(t). \quad (56)$$

З'ясуємо умови, за яких $k_{дин}(t)$

$$k_{дин}(t) = \left\{ \frac{m_2 \cdot \ddot{x}_2 + Q(t)}{\left(m_2 \cdot \frac{v_0}{t_n} \right)} \right\} = \left\{ \frac{C(x_1 - x_2)}{\left(m_2 \cdot \frac{v_0}{t_n} \right)} \right\}, \quad (57)$$

задовольняє наступному критерію якості руху системи:

$$\int_0^{t_n} k_{дин}^2(t) dt \Rightarrow \min. \quad (58)$$

Використовуючи методи класичного варіаційного числення (а саме, рівняння Ейлера-Пуассона), можна встановити, що (58) реалізується за умови

$$x_2^{(IV)} \cdot m_2 + \ddot{Q}(t) = 0. \quad (59)$$

Оскільки за будь-якого способу підйому вантажу («з ваги», «з підхватом») $\ddot{Q}(t) \equiv 0$, то (59) зведеться до рівняння

$$x_2^{(IV)} = 0. \quad (60)$$

Співставляючи рівняння (56) та умову Ейлера-Пуассона (60), матимемо

$$\begin{cases} x_2^{(IV)} + \Omega^2 \ddot{x}_2 = \Omega^2 a_i(t), \\ x_2^{(IV)} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \ddot{x}_2 = a_i(t). \quad (61)$$

Тоді (57) набуває вигляду

$$k_{\text{дин}}(t) = \frac{m_2 \cdot a_i(t) + Q(t)}{\left(m_2 \cdot \frac{v_0}{t_n}\right)}, \quad (62)$$

де $Q(t)$ є динамічною складовою пружної сили, що розвивається у канаті (тільки для $0 < t \leq \tau_0$, підйом «з підхватом»), а при $t > \tau_0$: $Q(t) \equiv m_2 g$. Отже, доцільно ввести $\tilde{k}_{\text{дин}}(t)$, який враховує лише зміни у динамічній складовій пружної сили у канаті, тобто

$$\tilde{k}_{\text{дин}}(t) = \frac{m_2 \cdot a_i(t)}{\left(m_2 \cdot \frac{v_0}{t_n}\right)}, \quad t_n \geq t > 0 \quad (63)$$

для підйому «з ваги» і

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{k}_{\text{дин}}(t) &= \left\{ \frac{m_2 a_i(t) + m_2 g \frac{t}{\tau_0}}{\left(m_2 \frac{v_0}{t_n}\right)} \right\}, & 0 \leq t \leq \tau_0; \\ \tilde{k}_{\text{дин}}(t) &= \left\{ \frac{m_2 a_i(t)}{\left(m_2 \frac{v_0}{t_n}\right)} \right\}, & \tau_0 < t \leq t_n, \end{aligned} \right. \quad (64)$$

для підйому «з підхватом».

Для $0 \leq t \leq t_n$ при підйомі «з ваги» та для $t \in [\tau_0, t_n]$ при підйомі «з підхватом» маємо

$$\left\{ \begin{aligned} i = 1 - \tilde{k}_{\text{дин1}}^{(\text{opt})} &= 1; \quad i = 2 - \tilde{k}_{\text{дин2}}^{(\text{opt})} = \left(1 - \frac{t}{t_n}\right); \\ i = 3 - \tilde{k}_{\text{дин3}}^{(\text{opt})} &= 12 \frac{t}{t_n} \left(1 - \frac{t}{t_n}\right)^2; \\ i = 4 - \tilde{k}_{\text{дин4}}^{(\text{opt})} &= 60 \left(\frac{t}{t_n}\right)^2 \left(1 - \frac{t}{t_n}\right)^3. \end{aligned} \right. \quad (65)$$

Для $0 \leq t \leq \tau_0$ при підйомі «з підхватом» маємо

$$\left\{ \begin{aligned} i = 1 - \tilde{k}_{\text{дин1}}^{(\text{opt})} &= 1 + \frac{gt}{\tau_0 \left(\frac{v_0}{t_n}\right)}; \\ i = 2 - \tilde{k}_{\text{дин2}}^{(\text{opt})} &= 1 - \frac{t}{t_n} + \frac{gt}{\tau_0 \left(\frac{v_0}{t_n}\right)}; \\ i = 3 - \tilde{k}_{\text{дин3}}^{(\text{opt})} &= 12 \frac{t}{t_n} \left(1 - \frac{t}{t_n}\right)^2 + \frac{gt}{\tau_0 \left(\frac{v_0}{t_n}\right)}; \\ i = 4 - \tilde{k}_{\text{дин4}}^{(\text{opt})} &= 60 \left(\frac{t}{t_n}\right)^2 \left(1 - \frac{t}{t_n}\right)^3 + \frac{gt}{\tau_0 \left(\frac{v_0}{t_n}\right)}. \end{aligned} \right. \quad (66)$$

У табл. 1 наведені значення $\tilde{k}_{\text{дин},i}^{(\text{opt})}$, $i \geq 2$ для різних моментів часу, згідно співвідношенням (65) при підйомі «з ваги» для $0 \leq t \leq t_n$ й при підйомі «з підхватом» для $\tau_0 \leq t \leq t_n$.

Слід зазначити, що максимальне значення $\tilde{k}_{\text{дин3}}^{(\text{opt})}(t)$ приймає при $t_3^* = \frac{1}{3}t_n$ і складає

$$\tilde{k}_{\text{дин3}}^{(\text{opt})}\left(\frac{t_n}{3}\right) = 1,7778, \text{ а максимальне значення}$$

$\tilde{k}_{\text{дин4}}^{(\text{opt})}(t)$ приймає при $t_4^* = 0,4t_n$ і складає

$$\tilde{k}_{\text{дин3}}^{(\text{opt})}(0,4t_n) = 2,0736.$$

Таблиця 1. Залежність $\tilde{k}_{\text{дин},i}^{(\text{opt})}(t)$, $i \geq 2$ для підйому «з ваги» ($0 \leq t \leq t_n$) та підйому «з підхватом» ($\tau_0 \leq t \leq t_n$)

Table 1. Dependence $\tilde{k}_{\text{дин},i}^{(\text{opt})}(t)$, $i \geq 2$ to lift "the weight" ($0 \leq t \leq t_n$) and recovery "from the sub-grip" ($\tau_0 \leq t \leq t_n$)

$\tilde{k}_{\text{дин},i}^{(\text{opt})}$, $i \geq 2$	$\frac{t}{t_n}$				
	0	0,25	0,5	0,75	1,0
$\tilde{k}_{\text{дин2}}^{(\text{opt})}$	1,0	0,75	0,5	0,25	0
$\tilde{k}_{\text{дин3}}^{(\text{opt})}$	0	1,6875	1,500	0,5625	0
$\tilde{k}_{\text{дин4}}^{(\text{opt})}$	0	1,5820	1,8750	0,5273	0

Таблиця 2. Залежність $\tilde{k}_{\text{дин}_i}^{(\text{opt})}$, $(1,4)$, $t \in [0, \tau_0]$ при підйомі вантажу «з підхватом»

Table 2. Dependence $\tilde{k}_{\text{дин}_i}^{(\text{opt})}$, $(1,4)$, $t \in [0, \tau_0]$ when lifting cargo "capture"

$\tilde{k}_{\text{дин}_i}^{(\text{opt})}$	v_0 , м/с	$t_{\text{п}}$, с	$\frac{t}{t_{\text{п}}}$				
			0	0,25	0,5	0,75	1,0
$\tilde{k}_{\text{дин}_1}^{(\text{opt})}$	0,25	1	1,000	10,810	20,620	30,430	40,240
		2	1,000	20,620	40,240	59,860	79,480
	0,50	1	1,000	5,905	10,810	15,715	20,620
		2	1,000	10,810	20,620	30,430	40,240
$\tilde{k}_{\text{дин}_3}^{(\text{opt})}$	0,25	1	1,012	10,822	20,632	30,442	40,252
		2	1,006	20,626	40,246	59,8662	79,486
	0,50	1	1,012	5,917	10,822	15,727	20,632
		2	1,006	10,816	20,626	30,436	40,246
$\tilde{k}_{\text{дин}_2}^{(\text{opt})}$	0,25	1	0,999	10,809	20,619	30,429	40,239
		2	0,9995	20,6195	40,2395	59,8595	79,4795
	0,50	1	0,999	5,904	10,809	15,714	20,619
		2	0,9995	10,8095	20,6195	30,4295	40,2395
$\tilde{k}_{\text{дин}_4}^{(\text{opt})}$	0,25	1	1,000	10,810	20,620	30,430	40,240
		2	1,000	20,620	40,240	59,860	79,480
	0,50	1	1,000	5,905	10,810	15,715	20,620
		2	1,000	10,81	20,620	30,430	40,240

У таблиці 2 подані значення $\tilde{k}_{\text{дин}_i}^{(\text{opt})}$ $(1,4)$ для різних моментів часу $t \in [0, \tau_0]$ для підйому вантажу «з підхватом».

ВИСНОВКИ

1. Обґрунтоване використання інтеграла Дюамеля для аналізу вимушених коливань та динамічних навантажень пружних зв'язків механізмів підйому вантажу кранів у процесах їх пуску. Визначені закони руху та коефіцієнти динамічності у пружних елементах (канатах) механізму для різних законів зміни у часі зовнішніх впливів.
2. Визначені коефіцієнти динамічності у канатах для різних способів підйому вантажу: «з ваги», «з підхватом». При цьому використані закони управління приводом механізму підйому вантажу, встановлені автором [7], а за критерій якості руху вантажу обраний такий, що мінімізує коефіцієнт динамічності напружень у канаті.
3. Визначені максимальні значення коефіцієнтів динамічності для кожного спо-

собу підйому вантажу. При цьому надзвичайно великі його значення виникають саме на етапі відриву вантажу від основи при підйомі «з підхватом» у проміжку часу $t \in [0, \tau_0]$, де τ_0 – тривалість контакту вантажу з основою. Встановлені залежності максимальних і проміжних значень коефіцієнту динамічності від тривалості процесу пуску ($t_{\text{п}}$) й швидкості усталеного підйому вантажу (v_0).

4. Результати, отримані у даному дослідженні, можуть бути у подальшому використані для уточнення й вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку механізмів підйому вантажу кранів («з ваги», «з підхватом») як на стадіях їх проектування (конструювання), так і у режимах реальної експлуатації.

ЛІТЕРАТУРА

1. Волков Д.П. Динамические нагрузки в универсальных экскаваторах-кранах / Д.П. Волков. М.: Машгиз, 1958. 269 с.

2. *Кожевников С.Н.* Динамика нестационарных процессов в машинах / С.Н. Кожевников. К.: Наукова думка, 1986. 288 с.
3. *Казак С.А.* Динамика мостовых кранов / С.А. Казак. М.: Машиностроение, 1968. 331 с.
4. *Александров М.П.* и др. Грузоподъемные машины / М.П. Александров и др.– М.: Машиностроение.-1986. 399 с.
5. *Гоberman Л.А.* Теория, конструкция и расчет строительных и дорожных машин / Л.А. Гоberman, К.В. Степанян, А.А. Яркин, В.С. Заленский. – М. Машиностроение, 1979. – 407 с.
6. *Ловеjкин В.С.* Мінімізація динамічних навантажень в пружних елементах вантажопідійомних машин / В.С. Ловеjкин // Гірничі, будівельні, дорожні і меліоративні машини. – 1998. – Вип. 52. – С. 63-68.
7. *Ловеjкин В.С.* Расчеты оптимальных режимов движения механизмов строительных машин / В.С. Ловеjкин. – К.: УМК ВО, 1990. – 168 с.
8. *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
9. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Унвер. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
10. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем / А.П. Филиппов. М.: Наука, 1970.– 820 с.
11. *Иванченко Ф.К.* и др. Расчеты грузоподъемных и транспортирующих машин / Ф.К. Иванченко и др. К.: Вища школа, 1978. – 576 с.
12. *Ловеjкин В.С.* Визначення оптимальних режимів руху маніпулятора за процес пуску (гальмування) під час роботи за однією з узагальнених координат / В.С. Ловеjкин, Д.О. Міщук // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. – №73, 2009. – С. 35-42.
3. *Kazak S.A., 1986.* Dinamika mostovyyh kranov [Dynamics of overhead cranes]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 331. – (in Russian).
4. *Aleksandrov M.P., 1986.* Gruzopodjomnye mashiny [Lifting machines]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 399. – (in Russian).
5. *Goberman L.A., 1979.* Teorija, konstrukcija i raschet stroitel'nyh i dorozhnyh mashin [Theory, design and calculation of construction and road machinery]. – Moscow, Mashinostroenie Publ., 407. – (in Russian).
6. *Lovejkin V.S., 1998.* Minimizaciona dinamichnih navantazhen' v pruzhnikh elementah vantazhopidjomnih mashin [Minimizing dynamic loads in elastic elements of lifting equipment]. Gornichi, budivel'ni, dorozhni i meliorativni mashini, [Mining, construction, road and melioration machines], No. 52, 63–68. – (in Ukrainian).
7. *Lovejkin V.S., 1990.* Raschety optimal'nyh rezhimov dvizhenija mehanizmov stroitel'nyh mashin [Calculations of the optimal modes of motion of machinery in construction machinery]. Kyiv, Publ. UMK VO, 168. – (in Ukraine).
8. *Biderman V.L., 1980.* Teorija mehanicheskikh kolebanij [Theory of mechanical oscillations]. Moscow, Graduate School Publ., 408. – (in Russian).
9. *Timoshenko S.P., 1985.* Kolebanija v inzhenernom dele [Fluctuations in Engineering]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 472. – (in Russian).
10. *Filippov A.P., 1970.* Kolebanija deformiruemyyh sistem [Vibrations of deformable systems]. Moscow, Science Publ., 820. – (in Russian).
11. *Ivanchenko F.K., 1978.* Raschety gruzopodjomnyh i transportirujushhih mashin [Calculations of load-lifting and transporting machines]. Kyiv, Graduate School Publ., 576. – (in Russian).
12. *Lovejkin V.S., Mishchuk D.O., 2009.* [Determining the optimal modes of motion of the manipulator for process start (inhibition) while working for one of the generalized coordinates]. Gornichi, budivelni, dorozhni ta meliorativni mashini [Mining, construction, road and reclamation machines], No. 73, 35–42. – (in Ukrainian).

REFERENCES

1. *Volkov D.P., 1958.* Dinamicheskie nagruzki v universal'nyh jeksavatorah-kranah [Dynamic loads in universal excavators-cranes]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 269. – (in Russian).
2. *Kozhevnikov S.N., 1986.* Dinamika nestacionarnyyh processov v mashinah [Dynamics of non-stationary processes in machines]. Kiev, Naukova dumka, 288. – (in Russian).