

УДК 621.5

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ РОБОТИ ВСТАНОВЛЕНОГО НА ПРУЖНУ  
ОПОРУ СТІЛОВОГО МАНІПУЛЯТОРА

Дмитро Міщук

Київський національний університет будівництва і архітектури,  
03037, Повітрофлотський просп., 31, Київ, Україна, e-mail: [mischuk84@gmail.com](mailto:mischuk84@gmail.com),  
[orcid.org/0000-0002-8263-9400](https://orcid.org/0000-0002-8263-9400)RESEARCH DYNAMICS OF THE BOOM MANIPULATOR  
MOUNTED ON ELASTIC RESISTANCE

Dmitriy Mischuk

Kyiv National University of Construction and Architecture  
03037, Povitroflotsky avenue, 31, Kiev, Ukraine, e-mail: [mischuk84@gmail.com](mailto:mischuk84@gmail.com),  
[orcid.org/0000-0002-8263-9400](https://orcid.org/0000-0002-8263-9400)

**АНОТАЦІЯ.** В перехідних режимах при роботі маніпулятора виникають коливання його виконавчої системи, які є наслідком нерівномірної роботи приводу, невідновленості механічної системи та пружних деформацій металокопункції. Для встановлення взаємозв'язків між геометричними і силовими параметрами маніпулятора та параметрами пружних деформацій побудовано динамічну та математичні моделі, що описують динаміку руху його стріли. В дослідженні пружні деформації представлено у вигляді додаткового кута повороту основи стріли.

**Ключові слова:** динаміка, маніпулятор, динамічна модель, диференціальне рівняння, коливання, пружна опора, стрілова система.

**АННОТАЦИЯ.** В переходных режимах при работе манипулятора возникают колебания его исполнительской системы, которые являются следствием неравномерной работы привода, неуравновешенности механической системы и упругих деформаций металлопластиковые конструкции. Для установления взаимосвязей между геометрическими и силовыми параметрами манипулятора и параметрами упругих деформаций построено динамическую и математические модели, описывающие динамику движения его стрелы. В исследовании упругие деформации представлены в виде дополнительного угла поворота основания стрелы.

**Ключевые слова:** динамика, манипулятор, динамическая модель, дифференциальное уравнение, колебания, упругая опора, стреловая система.

**ABSTRACT. Problem.** In transitional modes, the robot manipulator causes fluctuations in its operating system which is the result of the unevenness of the drive, unbalanced mechanical system and elastic deformations of metal structures. **Purpose.** To construct a mathematical model of the motion of an arrow of a manipulator in which its oscillations will be taken into account as a result of the elastic deformation of its support. **Method / methodology.** To establish a connection between the geometric and energy parameters of the manipulator and the parameters of elastic deformations, dynamic and mathematical models reflecting the dynamics of the movement of the arrow of the manipulator are constructed. The Lagrange equation of the second kind was used. In this study, the elastic deformation is presented as an additional angle of rotation of the base of the arrows and is determined by the potential spring compression energy. The theory of series and the method of a small parameter are used to solve the resulting differential equations of motion. **Originality / cost.** As a result of the study, practical equations have been defined that allow us to describe the dynamics of the manipulator. **Further development.** The obtained equations in the future will allow to determine the relationship between the angle of rotation of the arrow of the manipulator and its fluctuations.

**Key words:** dynamics, manipulator, dynamic model, differential equation, fluctuations, elastic pillar, boom system

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В перехідних періодах роботи маніпулятора в його привідних механізмах окрім статичних та інерційних сил внаслідок пружності ланок додатково виникають ди-

намічні навантаження коливального характеру. Тому для керування рухом подібних систем доцільно застосовувати оптимальні закони керування, які б відтворювали плавний характер зміни кінематичних характер-

ристик приводних ланок з урахування пружних деформацій металоконструкції.

Для визначення критеріїв оптимізації необхідно побудувати динамічну модель маніпулятора, яка б враховувала вплив пружного елемента на поведінку динаміки його роботи.

### МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою дослідження є висвітлення результатів аналізу динаміки роботи маніпулятора, встановленого на пружну опору із вантажем.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання: 1) побудувати динамічну та математичну моделі руху маніпулятора; 2) встановити взаємозв'язки між кінематичними та силовими параметрами розробленої моделі руху.

### ВИКЛАД МАТЕРІАЛУ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо динамічну систему (рис. 1) стрілового маніпулятора з гідроприводом, у якому масу  $m$  стріли та вантажу зосередимо на кінці жорсткої стріли довжиною  $l_1$ . В нижній частині стріла закріплена на одному нерухомому шарнірі та через опорну ланку довжиною  $l_2$  на пружній основі. На моделі пружна основа зображена у вигляді пружини жорсткістю  $c$ . Масою ланки  $l_2$  нехтуємо. В моделі також не враховано демпфірування можливих коливань пружини.

Зміна вильоту стріли маніпулятора відбувається шляхом її повороту навколо нерухомого шарніра за рахунок висування штоку приводного гідроциліндра, який одним кінцем приєднано до підйомної стріли, а іншим встановлено на опорну ланку. Це приводить до зміни його довжини  $q$ .

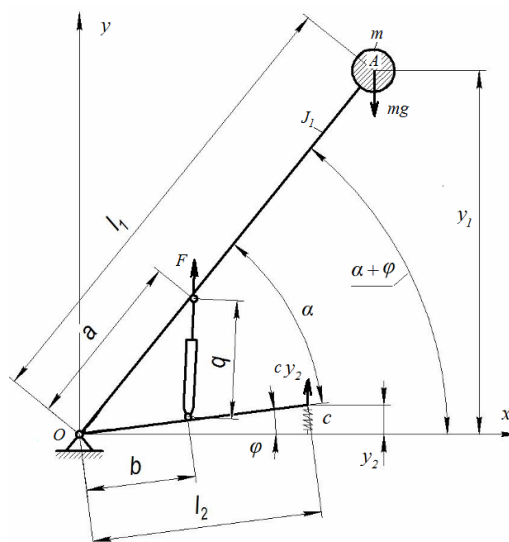
За узагальнені координати руху прийнято кут  $\alpha$  повороту стріли та кут  $\varphi$  повороту опорної ланки  $l_2$  внаслідок деформації пружної опори.

Кінетична енергія розглянутої системи дорівнює

$$T = \frac{1}{2} J_1 (\dot{\alpha} + \dot{\varphi})^2, \quad (1)$$

де  $\alpha$  та  $\varphi$  – відповідно кути повороту стріли від висування гідроциліндра та від деформації опори;  $J_1$  – зведений момент інерції маси стріли та вантажу.

Крапка над кутовими координатами означає диференціювання за часом. Таким чином  $\dot{\alpha}$  та  $\dot{\varphi}$  є кутовими швидкостями.



**Рис. 1.** Спрощена динамічна модель маніпулятора

**Fig. 1.** Simplified dynamic model of the manipulator

В спрощеному вигляді момент інерції  $J_1$  враховуватимемо як

$$J_1 = \left(\frac{m_c}{3} + m_b\right) l_1^2, \quad (2)$$

де  $m_c$  та  $m_b$  – відповідно маса стріли та вантажу.

Потенціальна енергія системи:

$$\Pi = -mgy_1 + \frac{cy_2^2}{2}, \quad (3)$$

де  $m = \frac{m_c}{2} + m_b$  – зведена маса системи;

$y_1$  – вертикальна координата зосередженої маси;  $y_2$  – координата деформації пружини.

Вертикальна координата зосередженої маси дорівнює

$$y_1 = l_1 \sin(\alpha + \varphi). \quad (4)$$

Координата деформації пружини

$$y_2 = l_2 \sin(\varphi). \quad (5)$$

В межах голономних зав'язків згідно методу рівняння Лагранжа 2-го роду виконано диференціювання виразів (1) і (3) та складено наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_1 - \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_2 - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}, \end{cases} \quad (6)$$

де  $Q_1 = M_1(\alpha, t)$  та  $Q_2 = 0$  – узагальнені зовнішні сили у вигляді рушійних моментів;  $M_1(\alpha, t)$  – рушійний момент, що створює привідний механізм маніпулятора для повороту його стріли.

Після перетворення системи (6) отримаємо

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \ddot{\beta} = \frac{M_1(\alpha, t)}{J_1} - \frac{mgl_1}{J_1} \cos(\alpha + \beta); \\ \ddot{\alpha} + \ddot{\beta} = -\frac{mgl_1}{J_1} \cos(\alpha + \beta) + \frac{cl_2^2}{2J_1} \sin 2\varphi. \end{cases} \quad (7)$$

Диференціальні рівняння (7) описують динаміку процесу руху стріли маніпулятора із урахуванням пружності опори. Перше рівняння може бути застосоване для визначення привідного моменту, який потрібно створити для забезпечення бажаного закону переміщення. Друге рівняння можна застосовувати для дослідження процесу коливання пружної опори з урахуванням закону руху стріли.

Із системи рівнянь (7) знайдено

$$M_1(\alpha, t) = cl_2^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \quad (8)$$

або

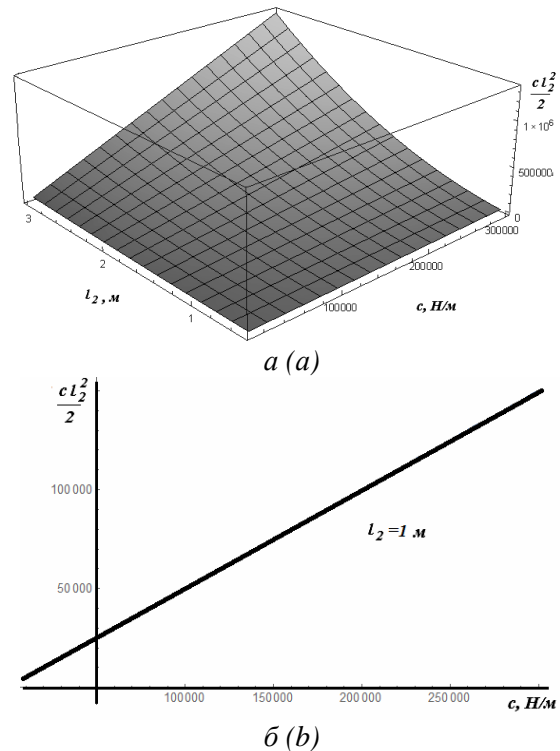
$$\varphi = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2M_1(\alpha, t)}{cl_2^2}\right). \quad (9)$$

Рівняння (9) чітко встановлює границі зміни кута повороту  $\varphi$ , які для розглядуваної динамічної моделі маніпулятора із прийнятими припущеннями знаходяться в межах  $-45^\circ \dots 45^\circ$ . Причому від'ємні значення кут прийматиме у випадку, коли величина привідного моменту становитиме від'ємне значення, тобто у випадку опускання стріли.

Так як значення  $\sin(\varphi)$  може змінюватися від  $-1$  до  $+1$ , то при підйманні стріли отримаємо значення критичної величини привідного моменту:

$$M_1(\alpha, t) \leq \frac{cl_2^2}{2}. \quad (10)$$

На рис. 2, а представлено залежність зміни критичного значення привідного моменту у вигляді тривимірної поверхні при зміні жорсткості в межах  $10000 \dots 300000$  Н/м та довжини опорної поверхні в межах  $0,5 \dots 3$  м, а на рис. 2, б зображено графік залежності критичного моменту від жорсткості опори для довжини опорної поверхні  $1$  м.



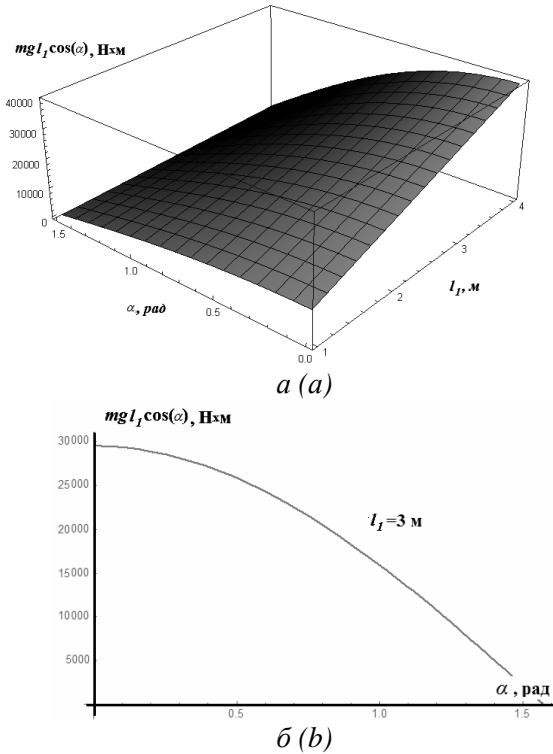
**Рис. 2.** Графіки зміни критичного моменту в залежності від параметру жорсткості та довжини опорної ланки: а – за одночасної зміни жорсткості та довжини опорної ланки; б – за фіксованої довжини опорної ланки та змінної жорсткості

**Fig. 2.** Graphs of the change of the critical moment depending on the rigidity parameter and the length of the reference line: а - at the same time changing the stiffness and length of the reference line; б - for a fixed length of the reference and a variable rigidity

З першого рівняння системи (7) визначимо статичну складову моменту опору:

$$M_1(\alpha) = mgl_1 \cos(\alpha). \quad (11)$$

На рис. 3 наведено графіки зміни статичного моменту в залежності від кута повороту  $\alpha$  та довжини стріли для зведеної маси вантажу 1000 кг.



**Рис. 3.** Графіки зміни статичного моменту опору в залежності від кута повороту стріли та її довжини: *a* – за одночасної зміни  $\alpha$  та  $l_1$ ; *b* – за фіксованої довжини стріли

**Fig. 3.** Graphs of the changes in the static moment of resistance, depending on the angle of rotation of the arrow and its length: *a* – for simultaneous change *a* and  $l_1$ ; *b* – for a fixed length of an arrow

Для розглядуваної динамічної моделі маніпулятора величину привідного моменту можна виразити через геометричні параметри стріли та величину привідного зусилля, зведеного до штоку гідроциліндра:

$$M_1(\alpha, t) = \frac{F(t) \cdot a \cdot b \cdot \sin(\alpha)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha)}}, \quad (12)$$

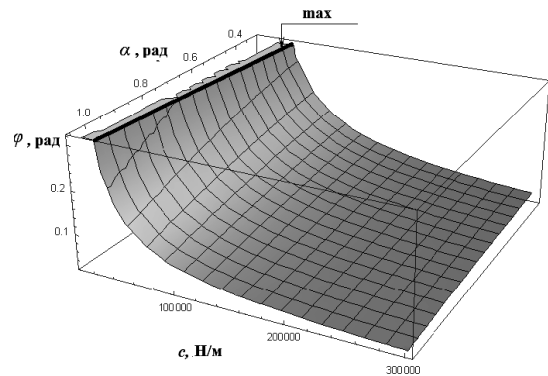
де *a* та *b* – геометричні параметри, якими визначається положення штоку привідного гідроциліндра; *F(t)* – привідне зусилля на штоку гідроциліндра.

Порівнюючи графіки на рис. 2 та рис. 3 відмітимо, що залежності (10)...(11) мають практичне значення при визначенні параметрів опорної рами маніпулятора, зокрема для розрахунку жорсткості.

Дослідимо зміну величини кута  $\varphi$  в положеннях статичної рівноваги. Із залежності (9) з використанням (11) маємо

$$\varphi = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2mgl_1 \cos(\alpha)}{cl_2^2}\right). \quad (13)$$

На рис. 4 показано характер та порядок величини зміни кута  $\varphi$  при варіації жорсткості в межах 10000...300000 Н/м та кута підйому стріли в межах  $\pi/10$ ...  $\pi/3$ .



**Рис. 4.** Поверхня рішень залежності (13): фіксовані параметри –  $m = 1000$  кг;  $l_1 = 3$  м;  $l_2 = 1$  м

**Fig. 4.** The surface of the dependence decision (13): fixed parameters –  $m = 1000$  kg;  $l_1 = 3$  m;  $l_2 = 1$  m

Таким чином, для заданих масово-геометричних параметрів розглядуваної динамічної системи маніпулятора спостерігається (див. рис. 4), що значний вплив на величину кута коливань  $\varphi$  відіграє жорсткість опори. При її величинах, менших за 50000 Н/м, початкове значення кута відхилення приймає недопустимі для роботи маніпулятора значення, які загрожують втраті його стійкості. При величині жорсткості більшій за 100000 Н/м значення початкового кута відхилення не перевищує  $5,7^\circ$ .

Аналізуючи систему диференціальних рівнянь (7) зазначимо, що вони є неоднорідними, мають найвищий другий порядок, а наявність тригонометричних функцій від диференційованого елемента робить їх нелінійними, що ускладнює пошук точного

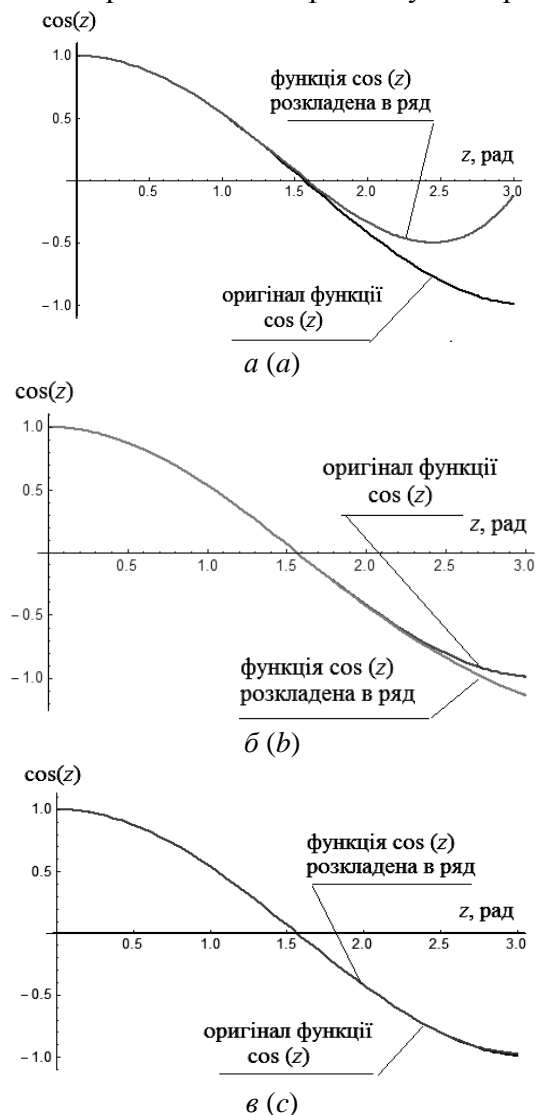
аналітичного розв'язку. Дані рівняння добре розв'язуються чисельним способом.

Введемо додаткову змінну  $z = \alpha + \varphi$ .

Застосовуючи теорію рядів, розкладемо тригонометричну функцію  $\cos(z)$  в ряд Маклорена-Тейлора:

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (14)$$

На (рис. 5) наведено графіки функції  $\cos(z)$ , розкладеної в ряд (14) з оцінкою похибки із оригіналом на проміжку  $0 \dots 3$  рад.



**Рис. 5.** Графіки функції  $\cos(z)$  розкладеної в ряд Маклорена-Тейлора побудованої для трьох (а), чотирьох (б) та п'яти (в) членів ряду

**Fig. 5.** The charts of the function  $\cos(z)$ , expanded in the Maclaurin-Taylor series constructed for the three (a), four (b), and five (c) members of the series

На графіках відображено проміжок зміни  $z$  від 0 до 3 радіан, який має практичне значення для розглядуваної динамічної моделі. Необхідно зазначити, що в реальних системах маніпуляторів кут повороту стріли зазвичай знаходиться в межах  $0 \dots \pi/2$  рад.

Графіки показують, що для достатньо точного відтворення функції  $\cos(z)$  на зазначеному проміжку достатньо застосувати п'ять членів ряду (14).

Застосовуючи ряд (14), перетворимо систему (7), позбавившись тригонометричної функції. Розглянемо випадок малих відхилень, приймаючи  $\sin(\varphi) \approx \varphi$ ,  $\cos(\varphi) \approx 1$ . В цьому випадку матимемо

$$\begin{cases} \ddot{z} + A_1 \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!}\right) = \frac{M_1}{J_1}; \\ \ddot{z} + A_1 \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!}\right) = A_2 \varphi, \end{cases} \quad (15)$$

$$\text{де } A_1 = \frac{mgl_1}{J_1}; \quad A_2 = \frac{cl_2^2}{J_1}.$$

Для розв'язку першого рівняння системи (15) скористаємося методом малого параметру. Розв'язок запишемо у вигляді

$$z(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots + a_n t^n; \quad (17)$$

$$\dot{z}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \dots + na_n t^{n-1}; \quad (18)$$

$$\ddot{z}(t) = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + \dots + n(n-1)a_n t^{n-2}. \quad (19)$$

Введемо початкові умови руху:

$$t = 0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad z(0) = \alpha_0 + \varphi_0 = z_0, \\ \dot{\alpha}(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0.$$

При початкових умовах визначаємо перші два коефіцієнта:  $a_0 = z_0$ ,  $a_1 = 0$ .

Підставивши рівняння (17) та (19) в перше диференціальне рівняння системи (15) та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях  $t$ , отримаємо

$$a_2 = \frac{1}{80640J_1} (-40320A_1J_1 + 20160a_0^2A_1J_1 - 1680a_0^4A_1J_1 + 56a_0^6A_1J_1 - a_0^8A_1J_1 + 40320M_1); \\ a_3 = 0;$$

$$a_4 = \frac{1}{120960} (5040a_1^2 A_1 - 2520a_0^2 a_1^2 A_1 + 210a_0^4 a_1^2 A_1 - 7a_0^6 a_1^2 A_1 + 10080a_0 A_1 a_2 - 1680a_0^3 A_1 a_2 + 84a_0^5 A_1 a_2 - 2a_0^7 A_1 a_2);$$

$$a_5 = 0;$$

$$a_6 = \frac{1}{604800} (-840a_1^4 A_1 + 420a_0^2 a_1^4 A_1 - 35a_0^4 a_1^4 A_1 - 10080a_0 a_1^2 A_1 a_2 + 1680a_0^3 a_1^2 A_1 a_2 - 84a_0^5 a_1^2 A_1 a_2 + 10080A_1 a_2^2 - 5040a_0^2 A_1 a_2^2 + 420a_0^4 A_1 a_2^2 - 14a_0^6 A_1 a_2^2 + 20160a_1 A_1 a_3 - 10080a_0^2 a_1 A_1 a_3 + 840a_0^4 a_1 A_1 a_3 - 28a_0^6 a_1 A_1 a_3 + 20160a_0 A_1 a_4 - 3360a_0^3 A_1 a_4 + 168a_0^5 A_1 a_4 - 4a_0^7 A_1 a_4);$$

$$a_7 = 0;$$

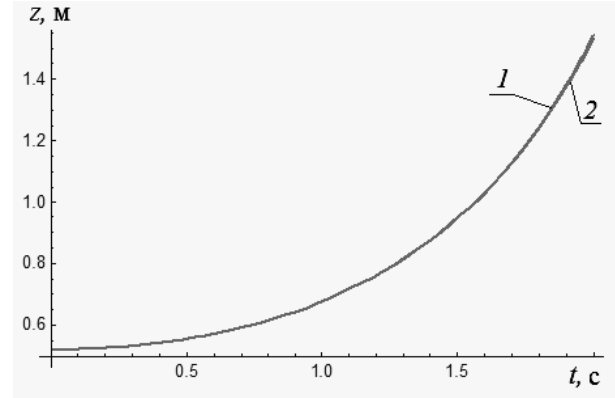
$$a_8 = \frac{1}{564480} (14a_1^6 A_1 - 7a_0^2 a_1^6 A_1 + 420a_0 a_1^4 A_1 a_2 - 70a_0^3 a_1^4 A_1 a_2 - 2520a_1^2 A_1 a_2^2 + 1260a_0^2 a_1^2 A_1 a_2^2 - 105a_0^4 a_1^2 A_1 a_2^2 - 1680a_0 A_1 a_2^3 + 280a_0^3 A_1 a_2^3 - 14a_0^5 A_1 a_2^3 - 1680a_1^3 A_1 a_3 + 840a_0^2 a_1^3 A_1 a_3 - 70a_0^4 a_1^3 A_1 a_3 - 10080a_0 a_1 A_1 a_2 a_3 + 1680a_0^3 a_1 A_1 \times a_2 a_3 - 84a_0^5 a_1 A_1 a_2 a_3 + 5040A_1 a_3^2 - 2520a_0^2 A_1 a_3^2 + 210a_0^4 A_1 a_3^2 - 7a_0^6 A_1 a_3^2 - 5040a_0 a_1^2 A_1 a_4 + 840a_0^3 a_1^2 A_1 a_4 - 42a_0^5 a_1^2 A_1 a_4 + 10080A_1 a_2 a_4 - 5040a_0^2 A_1 a_2 a_4 + 420a_0^4 A_1 a_2 a_4 - 14a_0^6 A_1 a_2 a_4 + 10080a_1 A_1 a_5 - 5040a_0^2 a_1 A_1 a_5 + 420a_0^4 a_1 A_1 a_5 - 14a_0^6 a_1 A_1 a_5 + 10080a_0 A_1 a_6 - 1680a_0^3 A_1 a_6 + 84a_0^5 A_1 a_6 - 2a_0^7 A_1 a_6).$$

Для встановлених характеристик стрілової системи маніпулятора ( $l_1 = 3$  м;  $l_2 = 1$  м;  $m = 1000$  кг;  $c = 100000$  Н/м) побудовано графіки зміни переміщення, швидкості та прискорення (рис. 6) стріли при дії сталого рушійного моменту  $M_1=28000$  Н. На графіках показано порівняння отриманого розв'язку методом малого параметру (крива 2) із числовим методом Рунге-Кутта (крива 1) для однакових масово-геометричних параметрів розглядуваної динамічної системи маніпулятора.

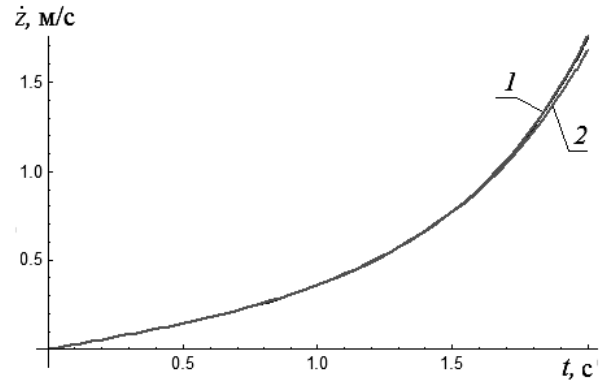
В загальному випадку, коли момент не є постійною величиною, а змінюється з плином часу, вищеописаний підхід також може

використовуватись, а загальний розв'язок в такому випадку буде подібний рівнянню (17), проте коефіцієнти  $a_0, a_1, \dots, a_n$  залежатимуть від часу:

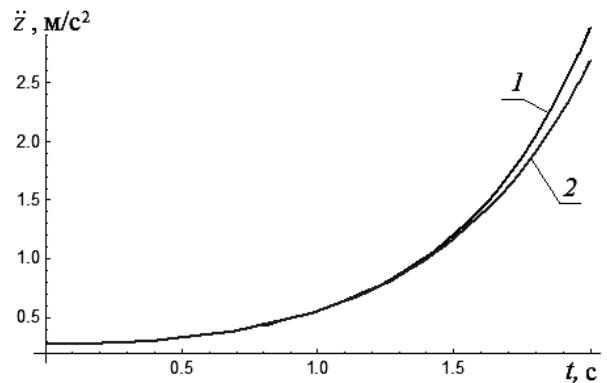
$$z(t) = a_0(t) + a_1(t)t + a_2(t)t^2 + \dots + a_n(t)t^n. \quad (20)$$



$a(a)$



$b(b)$



$c(c)$

**Рис. 6.** Графіки зміни кута повороту (а), кутової швидкості (б) та кутового прискорення (в) стріли маніпулятора при дії сталого рушійного моменту величиною 28 кН

**Fig. 6.** Graphs of the change of the angle of rotation (a), angular velocity (b) and angular acceleration (c) of the arrow of the manipulator under the action of a steady-state torque of 28 kN

## ВИСНОВКИ

1. Побудовано математичну модель руху стріли маніпулятора, яка враховує його масово-геометричні параметри та пружну деформацію опорного апарату.
2. Визначена залежність статичного кута деформації опорної ланки в залежності від навантаження та кута підйому стріли.
3. Знайдено розв'язок диференціального рівняння руху стріли маніпулятора, який можна представити у вигляді степеневого ряду. У порівнянні із чисельним точним розв'язком отриманий результат дає незначну похибку і дозволяє встановити аналітичну функцію, що у подальшому може застосовуватись в системах керування кранів-маніпуляторів. В подальшому необхідно визначити характер зміни кута деформації опорної ланки за різних режимів роботи маніпулятора.

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Лівінський О.М., Міщук Д.О.* Підйомно-транспортні та вантажно-розвантажувальні машини: Підручник / О.М. Лівінський, О.І. Курок, Л.Є. Пелевін, В.О. Маліч, В.М. Коваленко, В.Я. Бабиченко, І.В. Русан, В.О. Воляннюк, Д.О. Міщук Г.М. Мачишин. – 2016. – «МП Леся». – 677 с.
2. *Ловейкін В.С., Міщук Д.О.* Експериментальне дослідження динаміки руху штока гідроциліндра підйому шарнірно-зчленованої стрілової системи крана-маніпулятора з гідроприводом / В.С. Ловейкін, Д.О. Міщук // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. – 2011. – №78. – С. 28-34.
3. *Міщук Д.О.* Дослідження динамічної моделі гідравлічного циліндра об'ємного гідроприводу / Д.О. Міщук // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. – 2016. – №87. – С. 74-81.
4. *Бутенин Н.В.* Курс теоретической механики. В двух томах / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – Лань, 2002. – 737 с.
5. *Міщук Д.О.* Підвищення ефективності маніпулятора за рахунок оптимального керування / Д.О. Міщук // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. – 2015. – №85. – С. 43-50.
6. *Ловейкін В.С.* Оптимізація режиму зміни вильоту маніпулятора з гідроприводом. Монографія / В.С. Ловейкін, Д.О. Міщук. – ЦП «КОМПРИНТ». – 2013. – 206 с.

7. *Міщук Д.О.* Визначення оптимальних режимів руху маніпулятора за процес пуску (гальмування) під час роботи за однією з узагальнених координат / Д.О. Міщук, В.С. Ловейкін // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. – 2009. – №73. – С. 35-42.
8. *Ловейкін В.С., Міщук Д.О.* Обґрунтування параметрів та розробка системи керування маніпулятора для вантажних робіт / Д.О. Міщук, В.С. Ловейкін // Mechanical Engineering and Engineering Science. The Development of the Informational and Resource Providing of Science and Education in the Mining and Metallurgical and the Transportation Sectors. – 2014. – pp. 81-91.
9. *Міщук Д.О.* Кінематичний аналіз маніпуляційної системи будівельного робота / Д.О. Міщук // Вестник Харьковського національного автомобільно-дорожного університета. – 2014. – Вип. 65-66. – С. 90-96.
10. *Ловейкін В.С., Міщук Д.О.* Математична модель динаміки зміни вильоту маніпулятора з жорсткими ланками / В.С. Ловейкін, Д.О. Міщук // Техніка будівництва. – 2006. – №19. – С. 26-29.
11. *Овчинников П.П.* Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.2 / П.П. Овчинников. – 2-ге вид. – К.: Техніка, 2000. – 792 с.
12. *Wang, J., Gosselin, C. M.* Kinematic analysis and singularity representation of spatial five-degree-of-freedom parallel mechanisms. // J. Robotic Syst. – 1997. – No.14. p. 851–869.
13. *Pengcheng Liu, Hongnian Yu, Shuang Cang.* "Modelling and dynamic analysis of underactuated capsule systems with friction-induced hysteresis" // Intelligent Robots and Systems (IROS). – 2016. – IEEE/RSJ International Conference. – pp. 549-554.
14. *Shi Z.X., Fung Eric, H.K., Li Y.C.* Dynamic modelling of a rigid-flexible manipulator for constrained motion task control. Appl. Math. Model. – 1999. – No23. – pp. 509-525.
15. *Kalyoncu M.* Mathematical modelling and dynamic response of a multi-straight-line path tracing flexible robot manipulator with rotating-prismatic joint // Applied Mathematical Modelling. – 2008. – Vol.32, Issue 6. pp. 1087-1098.

## REFERENCES

1. *Livins'kij O.M., Kurok O.I., Pelevin L.E., Malich V.O., Kovalenko V.M., Babichenko V.Ja., Rusan I.V., Voljanjuk V.O., Mischuk D.O., Machishin G.M.* 2016. Pidjomno-trans-

- portni ta vantazhno-rozvantazhuval'ni mashini: Pidruchnik [Hoisting and transport machines: Handbook]. MP Lesiya Publ., 677. – (in Ukrainian)
2. *Lovejkin V.S., Mischuk D.O. 2011.* Eksperimental'ne doslidzhennja dinamiki ruhu shtoka gidrocilindra pidjomu sharnirno-zchlenovanoї strilivoї sistemi krana-manipuljatora z gidroprivodom [Experimental study of dynamics of a hydraulic cylinder rod lifting of a hinge-articulated boom system of a crane-manipulator with a hydraulic drive]. *Girnichy, budivelny, dorozhni ta meliorativni mashini [Mining, construction, road and meliorative machines]*, No78, 28-34. – (in Ukrainian)
  3. *Mischuk D.O. 2016.* Doslidzhennja dinamichnoї modeli gidravlichnoho cilindra ob'emnogo gidroprivodu [Investigation of dynamic model of hydraulic cylinder of a volumetric hydraulic drive]. *Girnichy, budivelny, dorozhni ta meliorativni mashini [Mining, construction, road and meliorative machines]*, No87, 74-81. – (in Ukrainian)
  4. *Butenin N.V. Lunc Ja.L., Merkin D.R. 2002.* Kurs teoreticheskoy mehaniki. V dvuh tomah [Course of theoretical mechanics. In two volumes]. Lani Publ., 737. – (in Russian)
  5. *Mischuk D.O. 2015.* Pidvishhennja efektyvnosti manipuljatora za rahunok optimal'nogo keruvannja [Increase the efficiency of the manipulator through optimal control]. *Girnichy, budivelny, dorozhni ta meliorativni mashini [Mining, construction, road and meliorative machines]*, No85, 43-50. – (in Ukrainian)
  6. *Mischuk D.O., Lovejkin V.S. 2013.* Optimizacija rezhimu zmini vil'otu mani-puljatora z gidroprivodom. Monografija [Optimization of the mode of change of departure of the manipulator with a hydraulic drive. Monograph]. CP Komprint Publ., 206. – (in Ukrainian)
  7. *Mischuk D.O., Lovejkin V.S. 2009.* Vznachennja optimal'nyh rezhimiv ruhu manipuljatora za proces pusku (gal'muvannja) pid chas roboti za odnicju z uzagal'nenih koordinat [Determination of optimal modes of movement of the manipulator for the process of starting (braking) while working on one of the generalized coordinates]. *Girnichy, budivelny, dorozhni ta meliorativni mashini [Mining, construction, road and meliorative machines]*, No73, 35-42. – (in Ukrainian)
  8. *Mischuk D.O., Lovejkin V.S. 2014.* Obruntuuvannja parametriv ta rozrobka sistemi keruvannja manipuljatora dlja vantazhnyh robot [Justification of parameters and development of a control system for manipulator for cargo operations]. *Mechanical Engineering and Engineering Science. The Development of the Informational and Resource Providing of Science and Education in the Mining and Metallurgical and the Transportation Sectors*, 81-91. – (in Ukrainian)
  9. *Mischuk D.O. 2014.* Kinematichnij analiz manipuljacyjnoї sistemi budivelnogo robota [Kinematical analysis of the manipulation system of the construction work]. *Vestnik Har'kovskogo nacionalnogo avtomobilno-dorozh-nogo universiteta [Bulletin of Kharkiv National Automobile Highway University]*, Vol.65-66, 90-96. – (in Ukrainian)
  10. *Lovejkin V.S., Mischuk D.O. 2006.* Matematichna model dinamiki zmini vilotu manipuljatora z zhorstkimi lankam [Mathematical model of dynamics of change of departure of manipulator with rigid links]. *Tehnika budivnictva [Construction techniques]*, No19, 26-29. – (in Ukrainian)
  11. *Ovchinnikov P.P., 2000.* Vishha matematika. Pidruchnik. U 2 ch. Ch 2 [Higher mathematics. Textbook. Ch 2]. Kyiv, Tehnika Publ., 792. – (in Ukrainian).
  12. *Wang, J. and Gosselin, C.M. 1997.* Kinematic analysis and singularity representation of spatial five-degree-of-freedom parallel mechanisms. *J. Robotic Syst.*, 14: 851–869. doi:10.1002/(SICI)1097-4563(199712)14:12<851::AID-ROB3>3.0.CO;2-T.
  13. *Pengcheng Liu, Hongnian Yu, Shuang Cang. 2016.* "Modelling and dynamic analysis of underactuated capsule systems with friction-induced hysteresis", *Intelligent Robots and Systems (IROS) IEEE/RSJ International Conference on*, 549-554.
  14. *Shi Z.X., Fung Eric, H.K., Li Y.C. 1999.* Dynamic modelling of a rigid-flexible manipulator for constrained motion task control. *Appl. Math. Model.*, 23, 509-525.
  15. *Kalyoncu M. 2008.* Mathematical modelling and dynamic response of a multi-straight-line path tracing flexible robot manipulator with rotating-prismatic joint. *Applied Mathematical Modelling*, Vol32, Is6, 1087-1098. doi.org/10.1016/j.apm.2007.02.032.