

УДК 531/534

МЕТОД АНАЛІЗУ ПАРАМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ТА РЕЗОНАНСІВ ЕЛЕМЕНТІВ МОСТОВИХ КРАНІВ У ПРОЦЕСАХ ЇХ ПУСКУ. I

Юрій Човнюк^{1,2}, Михайло Діктерук², Ольга Остапущенко²

¹ Національний університет біоресурсів і природокористування України, вул. Героїв Оборони, 12 в, Київ, Україна, e-mail: ychovnyuk@ukr.net

² Київський національний університет будівництва і архітектури, 03680, Повітрофлотський просп., 31, Київ, Україна

THE METHOD OF ANALYSIS OF PARAMETRIC OSCILLATIONS AND RESONANCES OF THE CRANES ELEMENTS DURING THEIR START-UP PROCESS. I

Yuriy Chovnyuk^{1,2}, Mykhaylo Dykteruk², Olga Ostapuschenko²

¹ National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Heroyiv Oborony st., 12в, Kyiv, Ukraine, e-mail: ychovnyuk@ukr.net

² Kyiv National University of Construction and Architecture, 03680, Povitroflotskyu Prospect, 31, Kyiv, Ukraine

АНОТАЦІЯ. Наведений метод аналізу параметричних коливань і резонансів елементів вантажопідйомних механізмів мостових кранів у процесах їх пуску. При цьому умови виникнення вказаних коливань та резонансів розглянуті і визначені у межах моделі крану як незамкненої коливної системи, у котрої зовнішній вплив зведений до зміни з плином часу її параметрів. Маятникові коливання вантажу на канаті у системі «вантажний ві-зок – канат – вантаж» мостового крана розглянуті і досліджені для трьох випадків: а) точка підвісу вантажу здійснює заданий періодичний рух у вертикальному напрямку; б) точка підвісу вантажу періодично рухається у горизонтальному напрямку; в) точка підвісу вантажу періодично рухається одночасно у горизонтальному та вертикальному напрямках. Визначені межі областей стійкості/нестійкості коливань параметричного типу для різних частот зміни параметрів досліджуваної системи. Для проведення аналізу використаний метод функції Лагранжа, рівняння Мат'є та підхід Л.Д.Ландау при дослідженні малих коливань системи відносно положення рівноваги.

Ключові слова: аналіз, параметричні коливання, резонанс, вантажопідйомний механізм, мостовий кран, пуск, періодичний рух, точка підвісу.

АННОТАЦИЯ. Приведен метод анализа параметрических колебаний и резонансов элементов грузоподъемных механизмов мостовых кранов в процессах их пуска. При этом условия возникновения указанных колебаний и резонансов рассмотрены и определены в рамках модели крана как незамкнутой колебательной системы, в которой внешнее воздействие сведено к изменению с течением времени ее параметров. Маятниковые колебания груза на канате в системе «грузовая тележка – канат – груз» мостового крана рассмотрены и исследованы для трех случаев: а) точка подвеса груза совершает заданное периодическое движение в вертикальном направлении; б) точка подвеса груза периодически двигается в горизонтальном направлении; в) точка подвеса груза периодически двигается одновременно в горизонтальном и вертикальном направлениях. Определены границы областей устойчивости/неустойчивости колебаний параметрического типа для разных частот изменения параметров исследуемой системы. Для проведения анализа использован метод функции Лагранжа, уравнение Мат'е и подход Л.Д.Ландау при исследовании малых колебаний системы относительно положения равновесия.

Ключевые слова: анализ, параметрические колебания, резонансы, грузоподъемный механизм, мостовой кран, пуск, периодическое движение, точка подвеса.

ABSTRACT. Purpose. The method of analysis of parametric oscillations and resonances of the hoisting cranes elements during their start-up process is proposed. **Methodology/approach.** The mentioned above analysis is made with a help of two-mass model for the system "cargo-truck-rope" with a varied in time parameters. The methods of Lagrange function and approach of L.D. Landau are used. **Research limitations/implications.** The deviation angle of rope from the vertical is small and calculation scheme for the analysis of parametric resonances in a system is such with a vibrations of the point of the suspension of horizontal and/or vertical type. **Originality/value.** The main parameters of parametric resonances are determined.

Key words: analysis, parametric oscillations, resonances, hoisting machines, bridge crane, start-up, periodic movement, point of suspension.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При роботі мостових кранів часто спостерігаються параметричні маятникові коливання вантажу, викликані зміною у часі параметрів системи «вантажний візок – канат – вантаж» (для мостових кранів), які призводять до нерівномірного руху кранів (або їх вантажних візків), створюють додаткові навантаження на силові елементи кранів, незручності при їх експлуатації, котрі необхідно враховувати при уточнених розрахунках як самих кранів, так і мехатронних систем управління ними.

Існуючі методи аналізу параметричних маятникових коливань вантажу на канатах за класичною схемою математичного аналізу і найпростішою схемою двомасової системи потребують, на думку авторів дослідження, подальшого уточнення та вдосконалення з метою оптимізації як самих систем управління кранів при їх пуску, так і пошуку нових економічно обґрунтованих методів управління (у т.ч. за допомогою сучасних мехатронних систем управління).

АНАЛІЗ ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розрахунок параметричних маятникових коливань вантажу зазвичай проводять за найпростішою схемою двомасової системи [1–5], вважаючи при цьому, що кут відхилення канатів від вертикалі не перевищує $10^\circ \dots 12^\circ$ (т.з. малі коливання). При цьому також вважають, що період параметричних маятникових коливань вантажу на гнучких канатах більше чи одного порядку з періодом розгону крана, а рушійне зусилля привідного двигуна механізму пересування постійне і дорівнює середньому пусковому значенню [5].

Для обґрунтування методу аналізу та оптимізації режимів руху мостового крана у процесі його пуску застосований відомий підхід [6].

МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

Мета роботи полягає у обґрунтуванні методу аналізу та оптимізації режимів руху

мостових кранів у процесі їх пуску за наявності параметричних коливань. При цьому самі кранові системи можуть знаходитись під впливом зовнішніх швидкодіючих/швидкозмінних сил.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ ДОСЛІДЖЕННЯ

1. Математична модель руху системи «вантажний візок – канат – вантаж» та можливості виникнення параметричних резонансів у ній.

Відомо [5], що рівняння руху системи «вантажний візок – канат – вантаж», яке моделює роботу мостового крана, може бути подане у вигляді

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t), \quad (1)$$

де x – горизонтальне переміщення вантажу відносно рухомої точки підвісу; ω – частота власних маятникових коливань вантажу відносно крана у період розгону:

$$\omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 H}}, \quad (2)$$

де H – довжина канату; $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння; $\frac{F(t)}{m} \equiv \frac{(P-W)}{m_1}$;

P – сумарне тягове зусилля привідних коліс візка; W – сила опору пересування візка; m_1 – маса вантажного візка; m_2 – маса вантажу; t – час.

У випадку, коли $m_2 = m_2(t)$, $H = H(t)$, $\omega = \omega(t)$. Якщо $P = W$, то рівняння (1) набуває вигляду

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0, \quad \ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (3)$$

Вигляд функції $\omega(t)$ задається умовами задачі. Нехай ця функція є періодичною з деякою частотою γ (і періодом $T = \frac{2\pi}{\gamma}$). Це

означає, що $\omega(t) = \omega(t+T)$, а тому і все рівняння (3) інваріантне по відношенню до перетворення $t \rightarrow t+T$ [6]. Звідси випливає, якщо $x(t)$ є розв'язком рівняння, то і функція $x(t+T)$ теж є розв'язком (3). Ін-

шими словами, якщо $x_1(t)$ і $x_2(t)$ – два незалежних інтеграла рівняння (3), то при заміні $t \rightarrow t+T$ вони перетворюються лінійним чином один через інший. При цьому можна обрати x_1 та x_2 таким чином, щоб їх зміна при заміні t на $(t+T)$ зводилась просто до множення на постійний множник (т.з. мультиплікатор):

$$x_1(t+T) = \mu_1 x_1(t), \quad x_2(t+T) = \mu_2 x_2(t), \quad (4)$$

якщо тільки постійні μ_1 та μ_2 не співпадають. Найбільш загальний вигляд функцій, які мають таку властивість, становить

$$x_1(t) = (\mu_1)^{\frac{t}{T}} \cdot \Pi_1(t), \quad x_2(t) = (\mu_2)^{\frac{t}{T}} \cdot \Pi_2(t), \quad (5)$$

де $\Pi_1(t)$ і $\Pi_2(t)$ – суто періодичні функції часу (з періодом T).

Постійні μ_1 та μ_2 у цих функціях повинні бути зв'язані одна з одною певним співвідношенням. Помножимо рівняння

$$\ddot{x}_1 + \omega^2(t) \cdot x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + \omega^2(t) \cdot x_2 = 0 \quad (6)$$

відповідно на x_2 і x_1 і віднімемо їх почленно одне від одного. Матимемо

$$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = \frac{d}{dt} (\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2) = 0 \quad (7)$$

або

$$\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 = \text{const.} \quad (8)$$

Але за будь-яких функцій $x_1(t)$ і $x_2(t)$ виду (5) вираз у лівій частині цієї рівності (8) множиться на $\mu_1 \mu_2$ при зміні аргументу t на T . Тому зрозуміло, що виконання рівності (8) в усякому випадку вимагає, щоб

$$\mu_1 \mu_2 = 1. \quad (9)$$

Подальші висновки про постійні μ_1, μ_2 можна зробити, виходячи з факту, що коефіцієнти рівняння (3) є дійсними числами. Якщо $x(t)$ є який-небудь інтеграл такого рівняння, тоді і комплексно спряжена функція $x^*(t)$ повинна задовольняти тому ж рівнянню. Звідси випливає, що пара постійних μ_1, μ_2 повинна співпадати з парою μ_1^*, μ_2^* , тобто повинно бути або $\mu_1 = \mu_2^*$, або μ_1 й μ_2 – дійсні числа. У першому випадку, враховуючи (9), маємо $\mu_1 = \frac{1}{\mu_1^*}$, тобто

$|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = 1$; постійні μ_1 та μ_2 за модулем дорівнюють одиниці.

У другому випадку два незалежних інтеграла рівняння (3) мають вигляд

$$x_1(t) = (\mu)^{\frac{t}{T}} \Pi_1(t), \quad x_2(t) = (\mu)^{\frac{t}{T}} \Pi_2(t) \quad (10)$$

з відмінним від одиниці додатнім або від'ємним дійсним числом μ . Одна з цих функцій (перша чи друга при $|\mu| > 1$ або $|\mu| < 1$) експоненціально зростає з часом t . Це означає, що стан спокою досліджуваної системи (у положенні рівноваги $x = 0$) буде нестійким: достатньо як завгодно слабого відхилення від цього стану, щоб переміщення x , що з'явиться при цьому, почало швидко зростати з плином часу. Це і є параметричним резонансом, що може виникати у системі «вантажний візок – канат – вантаж», моделюючій функціонування мостових кранів.

Слід зазначити, що при рівних нулю початкових значеннях x та \dot{x} вони залишались би рівними нулю і у подальшому на відміну від звичайного резонансу системи, у котрому зростання переміщення з плином часу (пропорціональне t) відбувається і при рівному нулю початковому значенні (x).

2. Умови виникнення параметричного резонансу для $\omega^2(t) = \omega_0^2 \cdot (1 + h \cos \gamma t)$.

З'ясуємо умови виникнення параметричного резонансу у системі «вантажний візок – канат – вантаж» мостового крана у важливому випадку, коли функція $\omega(t)$ мало відрізняється від деякої постійної величини ω_0 і є простою періодичною функцією

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 (1 + h \cos \gamma t), \quad 0 < h \ll 1. \quad (11)$$

Ми вважаємо h додатньою величиною, що можна завжди досягти належним вибором початку відліку часу.

2.1. Параметричний резонанс найбільшої інтенсивності (з точністю до величини $\sim h$).

Найбільш інтенсивним чином параметричний резонанс у досліджуваній системі виникає тоді, коли частота функції $\omega(t)$

близька до подвійної частоти ω_0 . Тому покладемо $\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll \omega_0$.

Розв'язок рівняння руху (рівняння Мат'є) (12)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t] x = 0 \quad (12)$$

будемо шукати у вигляді [6]:

$$x = a(t) \cos \left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \right] + b(t) \sin \left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \right]. \quad (13)$$

Функції $a(t)$ й $b(t)$ мають період зміни

$$\tilde{T} \gg \frac{2\pi}{\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right)}.$$

Підставимо (13) у (12) і виконаємо обчислення, зберігаючи лише члени першого порядку по ε . При цьому вважаємо, що $\dot{a} \sim \varepsilon a$, $\dot{b} \sim \varepsilon b$. Добуток тригонометричних множників розкладаємо у суму, а члени, які мають частоти $\left[3 \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right]$ і більші, не враховуємо, оскільки вони мають порядок малості по h вищий, ніж члени з частотами $\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right)$ й $(2\omega_0 + \varepsilon)$. В результаті маємо

$$\begin{aligned} & - \left(2\dot{a} + b\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2} b \right) \omega_0 \sin \left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \right] + \\ & + \left(2\dot{b} - a\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2} a \right) \omega_0 \cos \left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \right] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Виконання цієї рівності вимагає одночасного перетворення у нуль коефіцієнтів при кожному з множників при тригонометричних функціях. Звідси матимемо систему двох лінійних диференціальних рівнянь для функцій $a(t)$ й $b(t)$. У відповідності до загальних правил, шукаємо розв'язок, пропорційний $\exp(st)$. Тоді

$$\begin{cases} \left(\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} b + sa = 0; \\ -sb + \frac{1}{2} \cdot \left(\varepsilon - \frac{h\omega_0}{2} \right) \cdot a = 0, \end{cases} \quad (15)$$

і умова сумісності цих двох алгебраїчних рівнянь дає

$$s^2 = \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\frac{h\omega_0}{2} \right)^2 - \varepsilon^2 \right]. \quad (16)$$

Умова виникнення параметричного резонансу полягає у тому, що s повинно бути дійсним числом (тобто $s^2 > 0$). Постійна μ у (10) з s зв'язана залежністю $\mu = -\exp \left\{ \frac{s\pi}{\omega_0} \right\}$, тому що при заміні t на $\left[t + \frac{2\pi}{(2\omega_0)} \right]$ тригонометричні функції у (13) змінюють знак. Таким чином, він має місце у інтервалі:

$$-\frac{h\omega_0}{2} < \varepsilon < \frac{h\omega_0}{2} \quad (17)$$

навколо частоти $2\omega_0$. Якщо розглядати лише границі області резонансу, не розглядаючи вираз для s всередині неї, то можна спростити обчислення, приймаючи до уваги ту обставину, що на цих границях $s = 0$, тобто коефіцієнти a та b у (13) постійні; при цьому ми одразу отримаємо значення $\varepsilon = \pm \frac{h\omega_0}{2}$, яке відповідає границям області (17). Ширина цього інтервалу пропорціональна h , і такого ж порядку значення показника підсилення коливань s , які реалізуються у цьому інтервалі. Остаточний отриманий результат можна подати у такій формі замість (17):

$$\left| \frac{2(\gamma - 2\omega_0)}{h} \right| < \omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 H}}, \quad (18)$$

де всі коефіцієнти, що визначають ω_0 , є фіксованими (незалежними від t) параметрами.

Отже, (18) визначає інтервал виникнення параметричного резонансу у системі «вантажний візок – канат – вантаж» мостового крана при $\omega(t)$ (11), $\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll \omega_0$, а значення ω_0 визначається з (18). Параметр h визначається зі співвідношення $h = \frac{\omega^2(0) - \omega_0^2}{\omega_0^2}$.

Параметричний резонанс у досліджуваній системі має місце також при частотах γ

зміни параметра системи, близьких до значення виду $\frac{2\omega_0}{n}$, де n – будь-яке ціле число. Однак ширина резонансних областей (областей нестійкості) зі збільшенням n швидко зменшується за степеневою функцією $(h)^n$. Так само зменшуються і значення показника підсилення коливань в них s .

Явище параметричного резонансу у досліджуваній системі існує і при наявності слабкого тертя (в'язкого типу), але область нестійкості при цьому дещо звужується. Вказане вище тертя призводить до затухання амплітуди коливань за законом $\exp(-\lambda t)$. Тому підсилення коливань при параметричному резонансі відбувається, як $\exp[(s-\lambda)t]$ (з додатнім s , яке дає розв'язок задачі без тертя), а границя області нестійкості визначається рівністю $(s-\lambda)=0$. Використовуючи s з (16), отримаємо для резонансної області замість (17) нерівність

$$-\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2} < \varepsilon < \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2} \quad (19)$$

або

$$|\varepsilon| < \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2}. \quad (20)$$

Слід зазначити, що при цьому резонанс стає можливим не для будь-якої малої амплітуди h , а лише починаючи з певного “порогу” h_k , який у випадку (20) має вигляд

$$h_k = \frac{4\lambda}{\omega_0}. \quad (21)$$

Можна показати [6], що для резонансів поблизу частот $\frac{2\omega_0}{n}$ величина порогу

h_k пропорційна $(\lambda)^{\frac{1}{n}}$, тобто зростає зі збільшенням n .

2.2. Параметричний резонанс при $\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon$ (з точністю до величини $\sim h^2$).

Шукаємо розв'язок рівняння (12) у вигляді

$$x = a_0 \cos \left\{ \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \right\} + b_0 \sin \left\{ \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \right\} + a_1 \cos \left\{ 3 \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \right\} + b_1 \sin \left\{ 3 \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) t \right\}, \quad (22)$$

враховуючи у ньому (у порівнянні з (13)) також і члени наступного порядку по h . Виконуючи розрахунок аналогічно до проведеного у п.2.1 і вважаючи коефіцієнти a_0, b_0, a_1, b_1 постійними і нехтуючи членами з частотами $5 \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right)$ у членах з частотами $\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right)$ зберігаємо величини першого і другого порядку малості, а у членах з частотами $3 \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right)$ – члени першого порядку малості по h .

В результаті матимемо

$$a_1 = \frac{h}{16} a_0; \quad b_1 = \frac{h}{16} b_0; \quad (23)$$

$$\omega_0 \cdot \varepsilon \pm \frac{h\omega_0^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{h^2\omega_0^2}{32} = 0.$$

Розв'язуючи останнє рівняння з точністю до членів порядку h^2 , матимемо шукані граничні значення ε :

$$\varepsilon = \pm \frac{h\omega_0}{2} - \frac{1}{32} h^2 \omega_0 \quad (24)$$

або

$$\left| \frac{2\varepsilon + \frac{1}{16} h^2 \omega_0}{h} \right| < \omega_0. \quad (25)$$

Нерівність (25) визначає ширину інтервалу існування параметричного резонансу.

При цьому $\varepsilon = \gamma - 2\omega_0, h = \frac{\omega^2(0) - \omega_0^2}{\omega_0^2}$,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) \cdot g}{m_1 \cdot H}}, \text{ як і у п.2.1.}$$

2.3. Параметричний резонанс системи поблизу частоти $\gamma = \omega_0$.

Знайдемо границі області нестійкості при резонансі поблизу $\gamma = \omega_0$. Напишемо

$\gamma = \omega_0 + \varepsilon$, тоді отримаємо рівняння руху у вигляді

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos(\omega_0 + \varepsilon)t]x = 0. \quad (26)$$

Вважаючи, що граничні значення $\varepsilon \sim h^2$, шукаємо розв'язок у вигляді

$$x = a_0 \cos[(\omega_0 + \varepsilon)t] + b_0 \sin[(\omega_0 + \varepsilon)t] + a_1 \cos[2(\omega_0 + \varepsilon)t] + b_1 \sin[2(\omega_0 + \varepsilon)t] + c_1. \quad (27)$$

При цьому у (27) враховані одразу члени двох перших порядків по h . Застосовуючи процедуру, аналогічну до наведеної у п.2.1 і у п.2.2, знайдемо

$$a_1 = \frac{h}{6} a_0; b_1 = \frac{h}{6} b_0; c_1 = -\frac{h}{2} a_0. \quad (28)$$

Потім знаходимо значення двох границь області нестійкості:

$$\varepsilon = -\frac{5}{24} h^2 \omega_0, \quad \varepsilon = \frac{1}{24} h^2 \omega_0. \quad (29)$$

Таким чином, у даному випадку параметричний резонанс у системі має місце у інтервалі

$$-\frac{5}{24} h \omega_0 < \varepsilon < \frac{1}{24} h^2 \omega_0. \quad (30)$$

3. Умови виникнення параметричного резонансу у системі «вантажний візок – канат – вантаж» мостового крана за наявності коливань точки підвісу (вантаж на канаті до вантажного візка).

При функціонуванні мостового крана вантажний візок здійснює свій рух удодж рейкового шляху. При цьому внаслідок наявних нерівностей вказаного шляху неминуче виникають горизонтальні та вертикальні (а також поздовжньо–поперечні) коливання вантажного візка, що, у свою чергу, може призвести до виникнення параметричних коливань в системі «вантажний візок – канат – вантаж» мостового крана. Нижче наведені результати дослідження умов виникнення параметричних коливань/резонансів у згаданій вище системі для різних типів коливань точки підвісу вантажу (поздовжні/горизонтальні, вертикальні/поперечні, поздовжньо-поперечні).

Коливання маятника будемо розглядати у межах моделі плоского математичного маятника із зведеною масою $m = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$,

власна частота його коливань складає ω_0 , що визначається виразом типу (2) або (18).

Розрахункова схема для таких задач наведена на рис. 1.

На рис. 1 a, b – амплітуди, (γ_1, γ_2) – частоти коливань точки підвісу у відповідному напрямку.

Для проведення аналізу використаємо метод функції Лагранжа і вважатимемо, що кут відхилення канату з вантажем від вертикалі малий ($\varphi \ll 1$). Крім того, точка підвісу O_1 , у якій зосереджена маса m_1 вантажного візка крана, рухається у горизонтальному напрямку (вдодж осі Ox). Отже, рух точки O_1 доволі складний і складається з поздовжнього руху (вдодж рейкового шляху) та коливного (у відповідному напрямку, вдодж осей Ox чи Oy , або одночасно в обох напрямках). Для визначення функцій Лагранжа для кожного з випадків використаємо результати роботи [6].

Випадок А (рис. 1, а).

Функція Лагранжа для цього випадку має вигляд

$$L_1 = \frac{(m_1 + m_2)}{2} (\dot{x}_1)^2 + \frac{m_2}{2} \left(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l \dot{x}_1 \dot{\varphi} \cos \varphi \right) + m_2 g l \cos \varphi, \quad (31)$$

де

$$\begin{aligned} x_1 &= v_0 t + a \cos(\gamma_1 t); \\ y_1 &= l \cos \varphi, \quad l \equiv H, \end{aligned} \quad (32)$$

де v_0 – швидкість руху вантажного візка впододж рейкового шляху (вважаємо $v_0 = \text{const}$ у цьому випадку та інших, розглянутих нижче). Член, пропорційний у L_1 потенціальній енергії, дорівнює $(-m_2 g y_1)$. Це міркування використане і у подальшому для випадків, наведених на рис. 1, б і рис. 1, в.

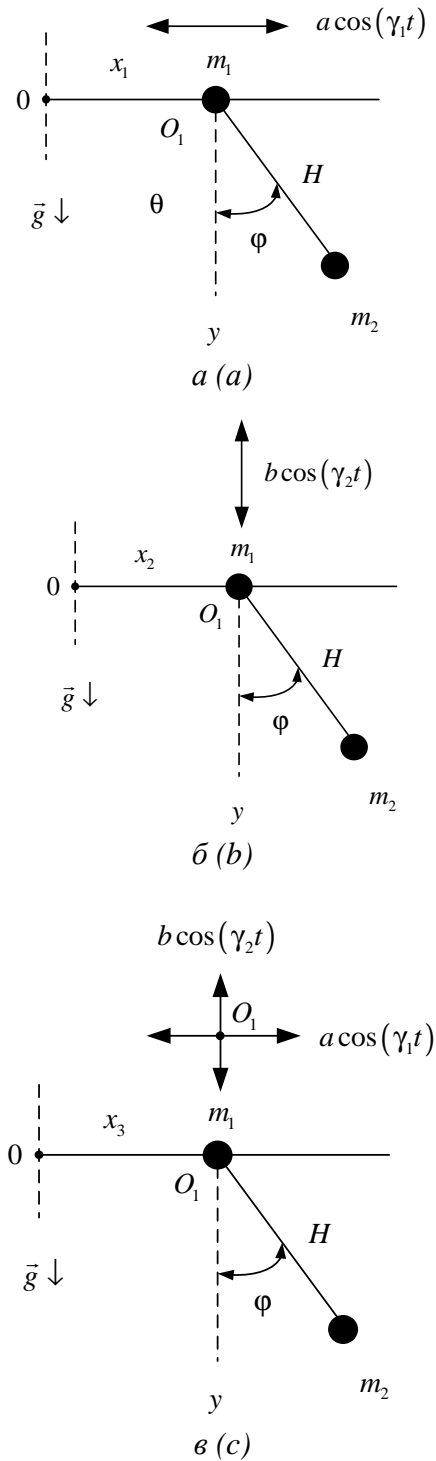


Рис. 1. Розрахункова схема для аналізу параметричних резонансів у системі при коливаннях точки підвісу: а) горизонтального типу; б) вертикального типу; в) поздовжньо-поперечного типу (φ – кут відхилення канату від вертикалі)

Fig. 1. The calculation scheme for the analysis of parametric resonances in a system with vibrations of the point of the suspension: a) horizontal type; b) the vertical type; c) longitudinal-transverse type (φ – angle of rope deviation from the vertical)

Для \dot{x}_1 у даному випадку маємо

$$\dot{x}_1 = v_0 - \gamma_1 a \sin(\gamma_1 t). \quad (33)$$

Рівняння Лагранжа для узагальнених координат (x_1, φ) мають вигляд

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l \{ \ddot{\varphi} \cos \varphi - (\dot{\varphi})^2 \sin \varphi \} = 0; & (34) \\ l \ddot{\varphi} + \dot{x}_1 \cos \varphi + g \sin \varphi = 0. & (35) \end{cases}$$

Оскільки у функції Лагранжа L_1 координата x_1 – циклічна (те ж саме можна сказати і про x_2 у L_2 й x_3 у L_3), то зберігається узагальнений імпульс P_{x_1} , який співпадає з горизонтальною компонентою повного імпульсу системи (рис. 1, а):

$$P_{x_1} = (m_1 + m_2) \dot{x}_1 + m_2 l \dot{\varphi} \cos \varphi = \text{const}. \quad (36)$$

Завжди можна вважати систему як ціле, що знаходиться у стані спокою [6], тоді $P_{x_1} = 0$, й інтегрування (36) дає співвідношення

$$(m_1 + m_2) \dot{x}_1 + m_2 l \sin \varphi = \text{const}, \quad (37)$$

яке визначає нерухомість центру інерції системи у горизонтальному напрямку.

Якщо використати (36), то вираз для енергії системи E_1 можна отримати у наступному вигляді:

$$E_1 = \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{2} \left\{ 1 - \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \cos^2 \varphi \right\} - \quad (38)$$

$$- m_2 g l \cos \varphi.$$

Звідси знаходимо

$$\begin{aligned} t = l \sqrt{\frac{m_2}{2(m_1 + m_2)}} \times \\ \times \int \sqrt{\frac{m_1 + m_2 \sin^2 \varphi}{E_1 + m_2 g l \cos \varphi}} d\varphi \end{aligned} \quad (39)$$

Виражаючи координати маси m_2 як $x_{m_2} = x_1 + l \sin \varphi$, $y_{m_2} = l \cos \varphi$ за допомогою (37) через φ знайдемо, що траєкторія цієї маси m_2 становлять відрізок еліпсу з горизонтальною піввіссю $\frac{l m_1}{(m_1 + m_2)}$ і вертикаль-

ною l . При $m_1 \rightarrow \infty$ ми повертаємось до звичайного математичного маятника, який здійснює коливання за дугою кола.

Всі міркування, наведені вище щодо траєкторії руху системи, цілком аналогічні і для систем, наведених на рис. 1, б і рис.1, в. Тільки у співвідношеннях (38) і (39) треба замінити E_1 на $E_i, i = \overline{(2,3)}$, а координати (горизонтальні) маси m_2 мають вигляд $x_{m_2} = x_i + l \sin \varphi$, де $i = \overline{(2,3)}$ у відповідності до типу системи.

Рівняння (35) можна подати в наступному вигляді:

$$\ddot{\varphi} + \frac{\ddot{x}_1}{l} \cos \varphi + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (40)$$

Враховуючи те, що $\varphi \ll 1, \frac{a}{l} \ll 1$, можна (40) подати наступним чином:

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{\tilde{\omega}_0^2}{2} \right) \left\{ 1 + \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right)^2 \frac{a^2 \gamma_1^2}{2l^2 \tilde{\omega}_0^2} \times \right. \\ \left. \times \cos(2\gamma_1 t) \right\} \varphi = \frac{\gamma_1^2 a}{2l} \cos(\gamma_1 t), \quad (41)$$

де $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ – частота коливань математичного маятника.

Розв'язок (41) розшукуємо у вигляді суми однорідного ($\varphi_{\text{одн.}}$) і частинного ($\varphi_{\text{част.}}$) розв'язків відповідно однорідного рівняння, яке можна отримати з (41), та неоднорідного рівняння, де знехтуємо членом $\square \left(\frac{a}{l} \right)^2$ у зв'язку з його малістю. Отже, частинний розв'язок $\varphi_{\text{част.}}$ має вигляд

$$\varphi_{\text{част.}}(t) = \frac{\left(\gamma_1^2 \frac{a}{2l} \right)}{\left(\frac{\tilde{\omega}_0^2}{2} - \gamma_1^2 \right)} \cos(\gamma_1 t). \quad (42)$$

Цей розв'язок визначає резонанс (звичайний) досліджуваної системи на частоті

$$\gamma_1 = \frac{\tilde{\omega}_0}{\sqrt{2}}. \quad (43)$$

Розв'язок $\varphi_{\text{одн.}}(t)$ розшукуємо (у наближенні $\sim \left(\frac{a}{l} \right)^2$) з наступного рівняння:

$$\ddot{\varphi}_{\text{одн.}} + \left(\frac{\tilde{\omega}_0^2}{2} \right) \times \\ \times \left\{ 1 + \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right)^2 \frac{a^2 \gamma_1^2}{2l^2 \tilde{\omega}_0^2} \cos(2\gamma_1 t) \right\} \varphi_{\text{одн.}} = 0. \quad (44)$$

Слід зазначити, що при виведенні рівнянь (41) і (44) $v_0 \rightarrow 0$ (у період пуску), а виникнення коливань точки підвісу викликане наявністю нерівностей на рейковому шляху вантажного візка мостового крана.

Рівняння (44) можна подати у вигляді рівняння Мат'є наступного вигляду:

$$\ddot{\varphi}_{\text{одн.}} + \Omega_0^2 \{1 + \tilde{h} \cos(2\gamma_1 t)\} \varphi_{\text{одн.}} = 0, \quad (45)$$

$$\text{де: } \Omega_0 = \frac{\tilde{\omega}_0}{\sqrt{2}}; \tilde{h} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right)^2 \frac{a^2 \gamma_1^2}{2l^2 \tilde{\omega}_0^2}.$$

Найбільш інтенсивним чином параметричний резонанс виникає, якщо частота $2\gamma_1$ близька до подвоєної частоти Ω_0 :

$$2\lambda_1 = 2\Omega_0 + \tilde{\epsilon}, \quad \tilde{\epsilon} \ll \Omega_0. \quad (46)$$

Розв'язок рівняння руху (для однорідного рішення):

$$\ddot{\varphi}_{\text{одн.}} + \Omega_0^2 \{1 + \tilde{h} \cos(2\Omega_0 + \tilde{\epsilon})t\} \varphi = 0 \quad (47)$$

знаходимо по аналогії з (12). (Слід зазначити, що і параметричний резонанс, як і наведений вище звичайний резонанс, спостерігається при $\gamma_1 \approx \frac{\tilde{\omega}_0}{\sqrt{2}}$).

Показник підсилення коливань у випадку параметричного резонансу знаходимо зі співвідношення

$$(\tilde{s})^2 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\tilde{h}\Omega_0}{2} \right)^2 - \tilde{\epsilon}^2 \right]. \quad (48)$$

Умова виникнення параметричного резонансу полягає у наявності дійсних значень \tilde{s} (тобто $\tilde{s}^2 > 0$). Таким чином, він має місце у інтервалі

$$-\frac{\tilde{h}\Omega_0}{2} < \tilde{\epsilon} < \frac{\tilde{h}\Omega_0}{2} \quad (49)$$

або

$$|\tilde{\varepsilon}| < \frac{\tilde{h}\Omega_0}{2}. \quad (50)$$

Випадок Б (рис. 1, б).

Функція Лагранжа L_2 для цього випадку набуває вигляду

$$L_2 = \frac{m_2}{2} \{ l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot \gamma_2 \cdot b \sin \gamma_2 t \} + m_2 g l \cos \varphi. \quad (51)$$

Для малих ($\varphi \ll 1$) коливань рівняння руху ($v_0 \rightarrow 0$) набуває вигляду

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} \right) \left\{ 1 + \frac{b}{l} \cos(\gamma_2 t) \frac{\gamma_2^2}{\left(\frac{g}{l} \right)} \right\} \varphi = 0. \quad (52)$$

Отже, у цьому випадку найінтенсивніший параметричний резонанс відбувається за умови

$$\gamma_2 = 2\sqrt{\frac{g}{l}} + \varepsilon^*, \quad \varepsilon^* \ll \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (53)$$

Тоді введений вище параметр h набуває вигляду

$$h = \frac{4b}{l}. \quad (54)$$

Умова існування параметричного резонансу має вигляд

$$|\varepsilon^*| < \frac{h\sqrt{\frac{g}{l}}}{2} = \frac{2b\sqrt{g}}{l^{\frac{3}{2}}}. \quad (55)$$

Випадок В (рис. 1, в).

Для малих ($\varphi \ll 1$) коливань рівняння руху ($v_0 \rightarrow 0$) набуває вигляду

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} \right) \left\{ 1 + \frac{b}{l} \cos(\gamma_2 t) \frac{\gamma_2^2}{\left(\frac{g}{l} \right)} \right\} \varphi = \frac{a\gamma_1^2}{l} \cos(\gamma_1 t). \quad (56)$$

Вважаємо, що $\left(\frac{a}{l}; \frac{b}{l} \right) \ll 1$, тоді виникає дві ситуації, які розглянуті нижче.

Ситуація 1 $\left(\frac{b}{l} \gg \frac{a}{l} \right)$. У цьому випадку

превалює параметричний резонанс у вертикальному (відносно рейкового шляху руху маси m_1) напрямку. Задача зводиться до рівняння (48) і співвідношень (53) – (55).

Ситуація 2 $\left(\frac{b}{l} \ll \frac{a}{l} \right)$. У цьому випадку

превалює звичайний резонанс у горизонтальному (вздовж рейкового шляху) напрямку. Рівняння руху системи набуває вигляду

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = \frac{a\gamma_1^2}{l} \cos(\gamma_1 t). \quad (57)$$

Рівняння (57) має у складі свого загального розв'язку член $\varphi_{\text{неодн.}}(t)$, який можна подати у наступному вигляді:

$$\varphi_{\text{неодн.}} = \frac{\left(\frac{a\gamma_1^2}{l} \right)}{\left(\frac{g}{l} - \gamma_1^2 \right)} \cos(\gamma_1 t). \quad (58)$$

Однорідний розв'язок (58) описує звичайні малі коливання математичного маятника з частотою $\sqrt{\frac{g}{l}}$.

ВИСНОВКИ

1. Обґрунтована фізико-механічна і математична моделі аналізу параметричних коливань і резонансів елементів мостових кранів у процесах їх пуску.

2. Визначені умови існування вказаних коливань та резонансів для випадків подовжнього (удовж рейкового шляху руху вантажного візка) й поперечного коливання точки підвісу вантажу на канаті до вантажного візка.

3. Отримані у роботі результати можуть у подальшому використовуватись для уточнення і вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку кінематичних та енергосилових характеристик руху мостових кранів [7-9] і елементів їх конструк-

цій у процесах пуску як на стадіях проектування (конструювання), так і у режимах реальної експлуатації вантажопідійомних механізмів кранів.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И.И.* Динамика машинных агрегатов на предельных режимах движения / И.И. Артоболевский, В.С. Лощинин. М.: Наука, 1977. – 325с.
2. *Грузоподъемные машины* / М.П. Александров, Л.Н. Колобов, Н.А. Лобов и др. – М.: Машиностроение, 1986. – 400с.
3. *Грузоподъемные краны* / Под ред. М.П. Александрова. – М.: Машиностроение, Кн.1. – 1981. – 216 с.; Кн.2. – 1981. – 287с.;
4. *Казак С.А.* Динамика мостовых кранов / С.А. Казак. М.: Машиностроение, 1968. – 472с.
5. *Лобов Н.А.* Динамика грузоподъемных кранов / Н.А. Лобов. – М.: Машиностроение, – 1987. – 160с.
6. *Ландау Л.Д.* Теоретическая физика. Т.1. Механика / Л.Д. Ландау, Е.И. Лифшиц. – М.: Наука, – 1965. – 204 с.
7. *Мищук Д.О.* Дослідження динамічної моделі гідравлічного циліндра об'ємного гідроприводу / Д.О. Міщук // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. – 2016. – №87. – С. 74-81.
8. *Skoruk O.V.* The strength and crack resistance fiber concrete slabs supported on four sides on repeated loads / O.V. Skoruk // Underwater technologies. – 2016. – Vol.03, P. 83-93.
9. *Gomon S.* Study on working peculiarities of glue laminated beams under conditions of slanting bending / S. Gomon, A. Pavluk // Underwater technologie. – 2017. – Vol.07, P. 42-48. doi.org/10.26884/1707.1801.

REFERENCES

1. *Artobolevskij I.I.* 1977. Dinamika mashinnyh agregatov na predel'nyh rezhimah dvizhenija. [Dynamics of machine units in the limiting modes of motion]. Moscow, Nauka Publ., 325. – (in Russian).
2. *Aleksandrov M.P., Kolobov L.N., Lobov N.A.* 1986. Gruzopodemnye mashiny [Hoisting machines]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 400. – (in Russian).
3. *Aleksandrov M.P.* 1981. Gruzopodemnye kranu. [Hoisting cranes]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 287. – (in Russian).
4. *Kazak S.A.* 1968. Dinamika mostovyh kranov. [Dynamics of overhead cranes]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 472. – (in Russian).
5. *Lobov N.A.* 1987. Dinamika gruzopodemnyh kranov. [Dynamics of cranes]. Moscow. Mashinostroenie Publ., 160. – (in Russian).
6. *Landau L.D.* 1965. Teoreticheskaja fizika, T1, Mehanika. [Theoretical physics, Vol.1, Mechanics]. Moscow, Nauka, Publ. 204. – (in Russian).
7. *Mischuk D.O.* 2016. Investigation of dynamic model of hydraulic cylinder of a volumetric hydraulic drive. Girnichi, budivelni, dorozhni ta meliorativni mashini [Mining, construction, road and meliorative machines], No87, 74-81. – (in Ukrainian).
8. *Skoruk O.V.*, 2016. The strength and crack resistance fiber concrete slabs supported on four sides on repeated loads. Underwater technologies, Vol.03, 83-93 (in Ukrainian).
9. *Gomon S., Pavluk A.* 2017. Study on working peculiarities of glue laminated beams under conditions of slanting bending. Underwater technologie, Vol.07, 42-48. doi.org/10.26884/1707.1801.