

УДК 621.87

## Анализ уточненной математической модели стреловой системы манипулятора с упругим основанием

Вячеслав Ловейкин<sup>1</sup>, Дмитрий Мищук<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины, 03041, Героев обороны, 12, Киев, Украина,

<sup>1</sup>lovvs@ukr.net, <https://orcid.org/0000-0003-4259-3900>,

<sup>2</sup>Киевский национальный университет строительства и архитектуры, 03037, Воздухофлотский просп., 31, Киев, Украина,

<sup>2</sup>mischuk.do@knuba.edu.ua, <https://orcid.org/0000-0002-8263-9400>

Received: 10.06.2022; Accepted: 28.06.2022

<https://doi.org/10.32347/gbdmm.2022.99.0101>

**Аннотация.** В данном исследовании предложена уточнённая математическая модель стреловой системы манипулятора, позволяющая исследовать динамику работы манипулятора с учетом податливости его упругого основания вследствие ее деформирования. Математическая модель составлена на основании уравнений Лагранжа второго рода для голономной механической системы с двумя степенями подвижности. В качестве обобщенных координат принято угол поворота стрелы манипулятора относительно горизонтальной поверхности и угол качания опорной рамы при этом звенье манипулятора принято абсолютно жесткими с массами, отнесенными в их геометрические центры. Результаты исследований в виде кинематических характеристик обобщенных координат и амплитуд колебаний податливого опорного звена стреловой системы манипулятора получено при воздействии приводного момента от гидропривода, выполненного для типовых линейных функций момента.

**Ключевые слова:** динамика, манипулятор, динамическая модель, дифференциальное уравнение, колебания, упругая опора, стреловая система.

### АНАЛИЗ ПРОБЛЕМЫ

При работе грузоподъемных машин, в частности подъемных стреловых кранов, кранов-манипуляторов и подобных систем, в их приводных механизмах возникают значительные динамические нагрузки, которые приводят к колебаниям составных элементов таких систем [1-5]. Одним из негативных последствий может оказаться

потеря устойчивости грузоподъемной машины вследствие деформации ее опорного механизма [6-8]. В качестве опорной системы манипулятора может быть его рама, элементы опорного контура и даже опорная поверхность. Так как все эти элементы имеют разную жесткость, рассчитать которую точно порой довольно сложно, а иногда и не возможно, необходимо иметь представление о величине влияния упругого основания на динамическую картину машины в целом [8]. Таким образом исследование динамических характеристик кранов и манипуляторов с учетом упругости их опорных элементов является важной проблемой.

### ПОИСК СУЩЕСТВУЮЩИХ РЕШЕНИЙ

Ранее в работах [9-11] уже было рассмотрено проблему влияния упругости звеньев манипулятора на динамику его работы, а в работах [10, 11] предложены математические модели манипулятора на упругом основании, однако представленные исследования не показывают полную динамическую картину влияния упругости звеньев системы на процесс изменения вылета.

В работе [12] показано решение по снижению колебаний механической стрелы манипулятора, работающего на упругом основании, однако при этом была использована упрощенная математическая модель динамической колебательной системы.

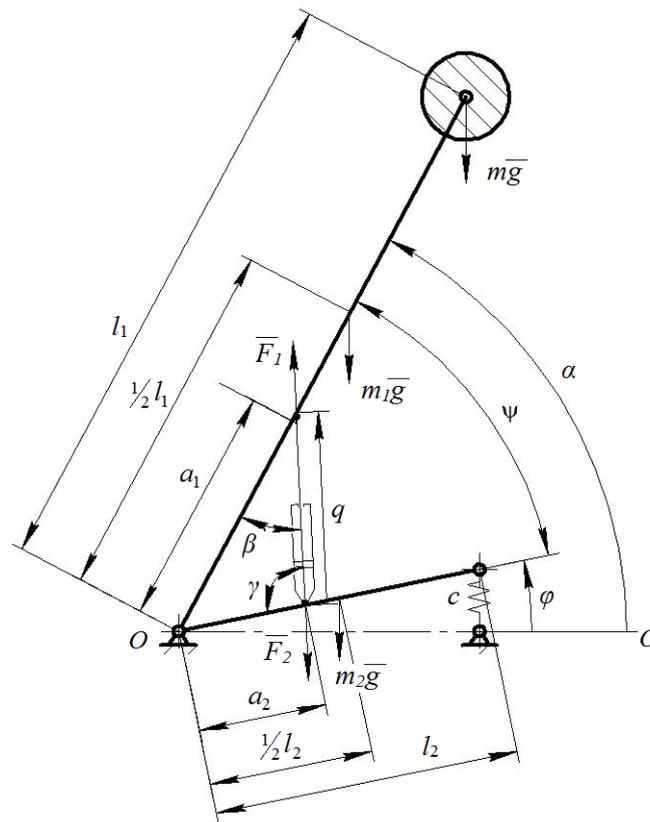
Данное исследование проведено чтобы уточнить существующую математическую модель манипулятора на упругом основании и исследовать ее поведение на внешнее воздействие при изменении упругости опорного механизма.

### ОСНОВНАЯ ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Построение адекватной математической модели манипулятора, работающего на упругом основании в процессе изменения вылета груза за счет подъёма стрелы и анализ ее поведения на внешнее воздействие.

### ИЗЛОЖЕНИЕ МАТЕРИАЛА ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассмотрим динамическую систему стрелового манипулятора с гидроприводом (см. Рис. 1), которая состоит из стрелы длиной  $l_1$  и массой  $m_1$ , приводного гидроцилиндра и опорной рамы длиной  $l_2$  и массой  $m_2$ . Стрела шарнирно закреплена на неподвижной опоре. На стреле расположен груз массой  $m$ , а перемещения стрелы выполняется гидроцилиндром, который штоком контактирует со стрелой на расстоянии  $a_1$  от оси ее поворота, а корпусом – с опорной рамой на расстоянии  $a_2$  от оси поворота стрелы. Опорная рама одной своей частью



**Рис. 1.** Динамическая модель рассматриваемой стреловой системы манипулятора:  $l_1$  – длина стрелы;  $l_2$  – длина опорной базы;  $a_1, a_2$  – установочные размеры приводного гидроцилиндра;  $q$  – координата перемещения штока приводного гидроцилиндра;  $\alpha$  и  $\varphi$  – соответственно, углы поворота стрелы и качания опорной базы относительно горизонтальной поверхности  $O-O'$ ;  $m, m_1, m_2$  – массы груза, стрелы и опорной базы манипулятора;  $F_1, F_2$  – приводная сила подъёма стрелы и сила ее противодействия, которая воспринимается опорной базой манипулятора;  $c$  – жесткость опорной стойки;  $\beta$  и  $\gamma$  – вспомогательные углы

**Fig. 1.** The dynamic model of the manipulator jib system:  $l_1$  – the length of the boom;  $l_2$  – the length of the support base;  $a_1, a_2$  – installation dimensions of the drive hydraulic cylinder;  $q$  – the coordinate of movement rod of the drive hydraulic cylinder;  $\alpha$  and  $\varphi$  – angles of rotation the boom and the support base relative to the horizontal surface  $O-O'$ ;  $m, m_1, m_2$  – weight of the load, manipulator boom and support base;  $F_1, F_2$  – drive force of boom lifting and force of its reaction, which is perceived by the manipulator support base;  $c$  – the support rigidity;  $\beta$  and  $\gamma$  – auxiliary angles

вместе со стрелой опирается на неподвижную опору, а другой – на подвижное в вертикальной плоскости звено опорной части, которое на представленной схеме изображено в виде пружины жесткостью  $c$ .

На схеме из Рис. 1 показан угол  $\varphi$  отвечающий за поворот опорной рамы и общий угол  $\alpha$  поворота стрелы относительно горизонтальной плоскости. Таким образом угол  $\alpha$  зависит от угла  $\varphi$  и отвечает за совместное движение стрелы и опорной рамы. Массой гидроцилиндра и упругостью стрелы в дальнейшем пренебрегается.

При выдвигении штока приводного гидроцилиндра происходит изменение угла  $\psi$  между стрелой и опорной рамой, что приводит к повороту стрелы вокруг ее неподвижной оси, однако вследствие деформации пружинной опоры, рама, на которую опирается приводящий гидроцилиндр и передает на ее нагрузку, также совершает движение.

Кинетическая энергия рассматриваемой системы при условии, что масса стрелы и опорной рамы сосредоточены в их геометрических центрах, равна:

$$T = \frac{1}{2}(J_1 + m_1 l_1^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}^2, \quad (1)$$

где  $J_1$  и  $J_2$  – моменты инерции стрелы и опорной рамы относительно точки их поворота;  $\dot{\alpha}$  и  $\dot{\varphi}$  – угловые скорости.

Потенциальная энергия системы:

$$\begin{aligned} \Pi = & (m + \frac{m_1}{2}) g l_1 \sin \alpha + \\ & + \frac{1}{2} m_2 g l_2 \sin \varphi + \frac{1}{2} c l_2^2 (\varphi - \varphi_0)^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $m$ ,  $m_1$  и  $m_2$  – соответственно, масса груза, стрелы и опорной рамы;  $l_1$ ,  $l_2$  – длина стрелы и опорной рамы;  $c$  – жесткость упругой опорной стойки;  $\varphi_0$  – начальное отклонение опорной рамы от горизонтали

(в дальнейших расчетах для простоты было принято  $\varphi_0 = 0$ ).

Используя уравнение Лагранжа второго рода в котором обобщенными координатами приняты угол  $\varphi$  качания стреловой системы и обобщенный угол  $\alpha$  перемещения стрелы, получено систему уравнений, описывающие динамику рассмотренной системы:

$$\begin{cases} (J_1 + m l_1^2) \ddot{\alpha} = M - (m - \frac{m_1}{2}) g l_1 \cos \alpha; \\ J_2 \ddot{\varphi} = -M - m_2 g l_2 \cos \varphi - c l_2^2 (\varphi - \varphi_0); \\ \psi = \alpha - \varphi, \end{cases} \quad (3)$$

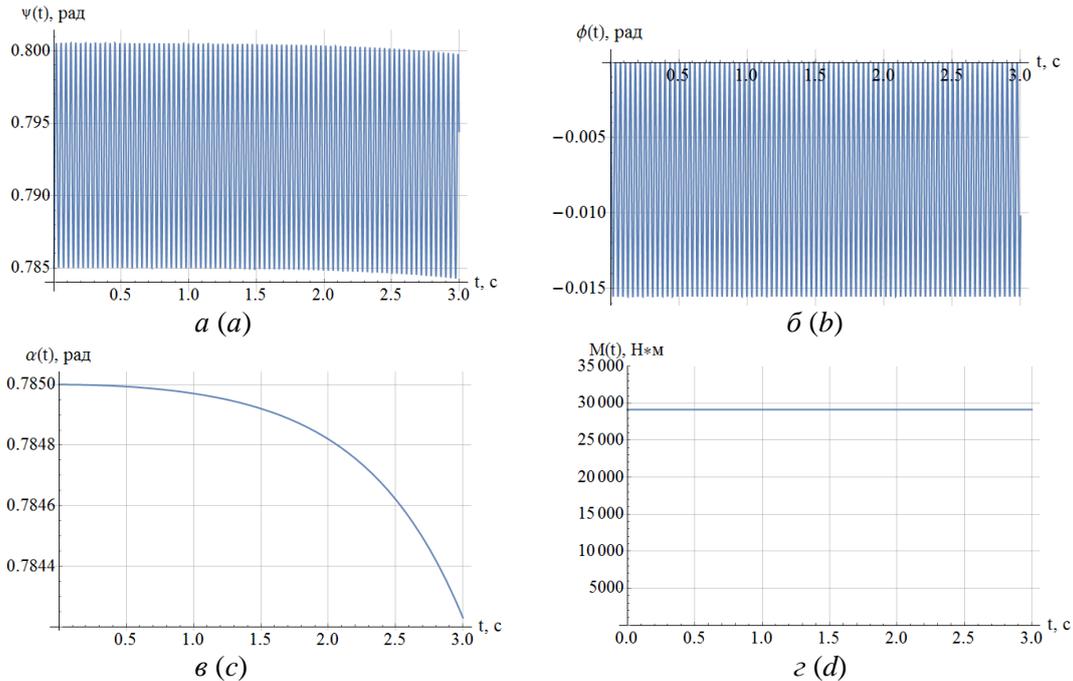
где  $M$  – внешний приводящий момент, создаваемый приводом;  $\psi$  – угол между стрелой и опорной рамой.

Внешний приводной момент может быть найден через параметры гидравлического привода:

$$M = p S a_1 a_2 \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 \cos(\alpha - \varphi)}}, \quad (4)$$

где  $p$  – давление в нагнетающей гидролинии приводного гидроцилиндра;  $S$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  – соответственно рабочая площадь приводного гидроцилиндра и его установочные размеры.

Числовыми методами с использованием решателя Mathematica найдены решения для дифференциальных уравнений задачи (3) на основании чего исследована закономерность влияния приводного момента на изменения угла поворота стрелы и угла качания опорной рамы. На Рис. 2 показано зависимости изменения углов поворота и приводного момента для следующих параметров стреловой системы манипулятора:  $m_1 = 300$  кг;  $m_2 = 100$  кг;  $m = 900$  кг;  $l_1 = 4$  м;  $l_2 = 2$  м;  $J_1 = \frac{1}{3} m_1 l_1^2$ ;  $J_2 = \frac{1}{3} m_2 l_2^2$ ;  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>;  $\varphi(0) = 0$ ;  $\psi(0) = 45^\circ$ .



**Рис. 2.** Графики изменения угла поворота стрелы  $\psi$  (*a*), угла качания опорной рамы  $\phi$  (*b*) и общего угла поворота  $\alpha$  (*в*) при воздействии приводного момента  $M$  равного моменту статического равновесия системы (*г*) для начального положения стрелы  $\psi(0) = 45^\circ$ ,  $\phi(0) = 0^\circ$  и жесткости опорной стойки  $c = 1 \cdot 10^6$  Н/м

**Fig. 2.** The graphs of change an angle  $\psi$  of rotation the boom (*a*) and the swing angle  $\phi$  of the support frame (*b*) and total swing angle under the influence of the driving moment  $M$  equal to the moment of static equilibrium of the system (*c*) at the initial position  $\psi = 45^\circ$ ,  $\phi = 0^\circ$  and the rigidity of the support frame with  $c = 1 \cdot 10^6$  N/m

Как видно из графиков на Рис. 2, при воздействии на систему внешним моментом равным моменту статического равновесия, можно получить условие качания опорной рамы манипулятора, причем чем больше жесткость упругой опоры, тем меньше будет амплитуда, однако даже при жесткости в  $1 \cdot 10^6$  Н/м наблюдаются микроколебания. Небольшие изменения общего угла  $\alpha$  из Рис. 2, *в* свидетельствует о небольшом «проседании» опорной стойки вследствие чего система начинает постепенно выходить из состояния равновесия, дополнительно нагружая упругую опорную стойку.

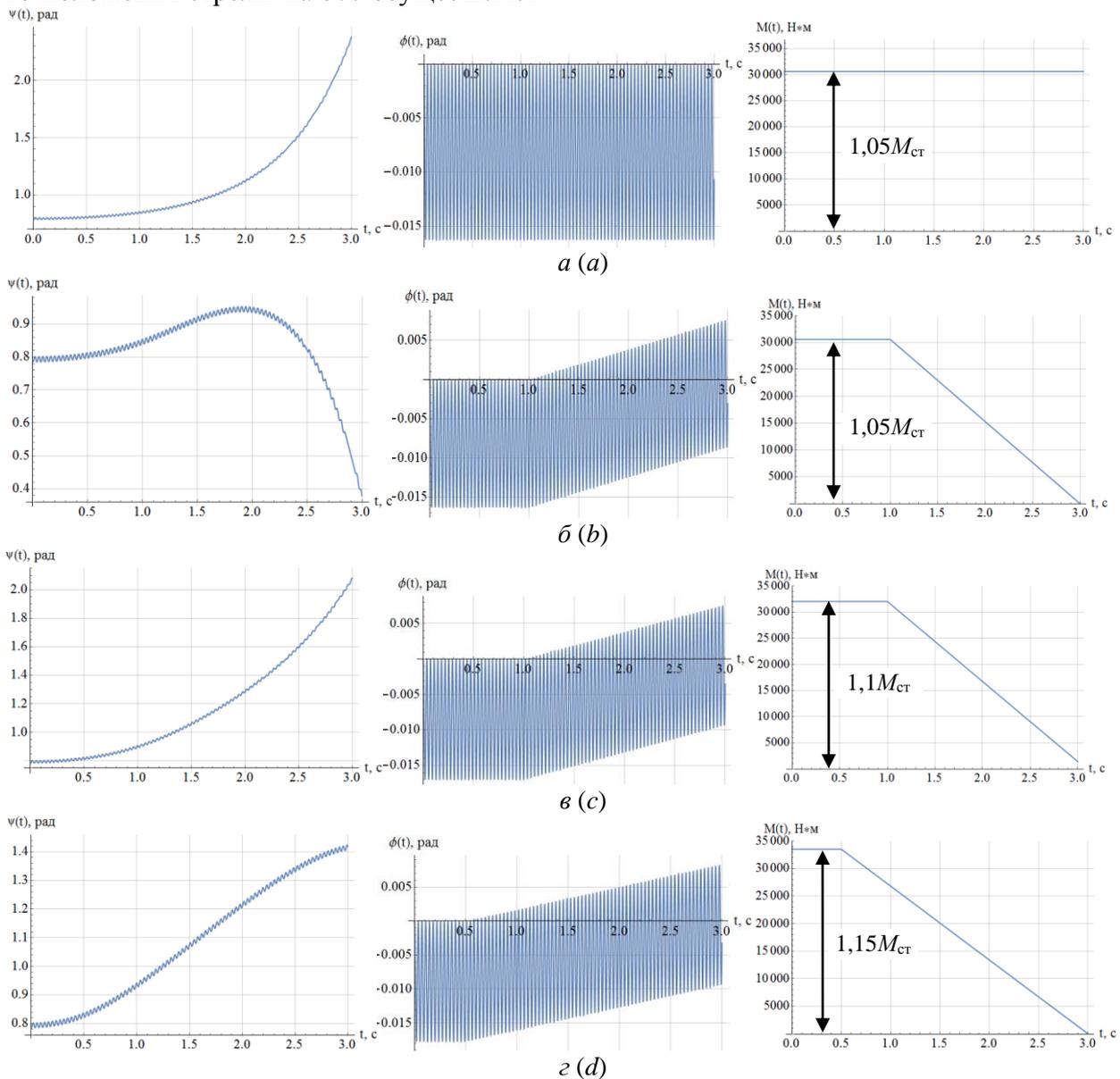
На Рис. 3 и Рис. 4 представлено графики, которые построены для разных вариантов нагружения приводным моментом рассматриваемой стреловой системы манипулятора. Графики на Рис. 3 и Рис. 4 показывают, что уменьшение жесткости опорной стойки, приводит к увеличению колебаний в системе. Также можно уви-

деть, как небольшое увеличение на 5-25% приводного момента приводит к выходу стреловой системы из состояния равновесия и порождает колебательные процессы. Причем также важным аспектом является время приложения нагрузки. Так на Рис. 4 *в* и Рис. 4 *г* видно, что действия небольшого внешнего момента на систему, который превышает момент статического равновесия на 10-15% на протяжении всего 0,1 с побуждает перемещение стрелы и проседания опорной стойки манипулятора. Увеличение жесткости опорного звена способствует уменьшению колебаний, однако не убирает их полностью. В системе остаются микро перемещения не заметны человеческому глазу, однако ощутимы для металлоконструкции стреловой системы машины и могут негативно влиять на ее ресурс.

Также необходимо отметить, что в данной модели не было учтено упругости самой стреловой системы манипулятора и

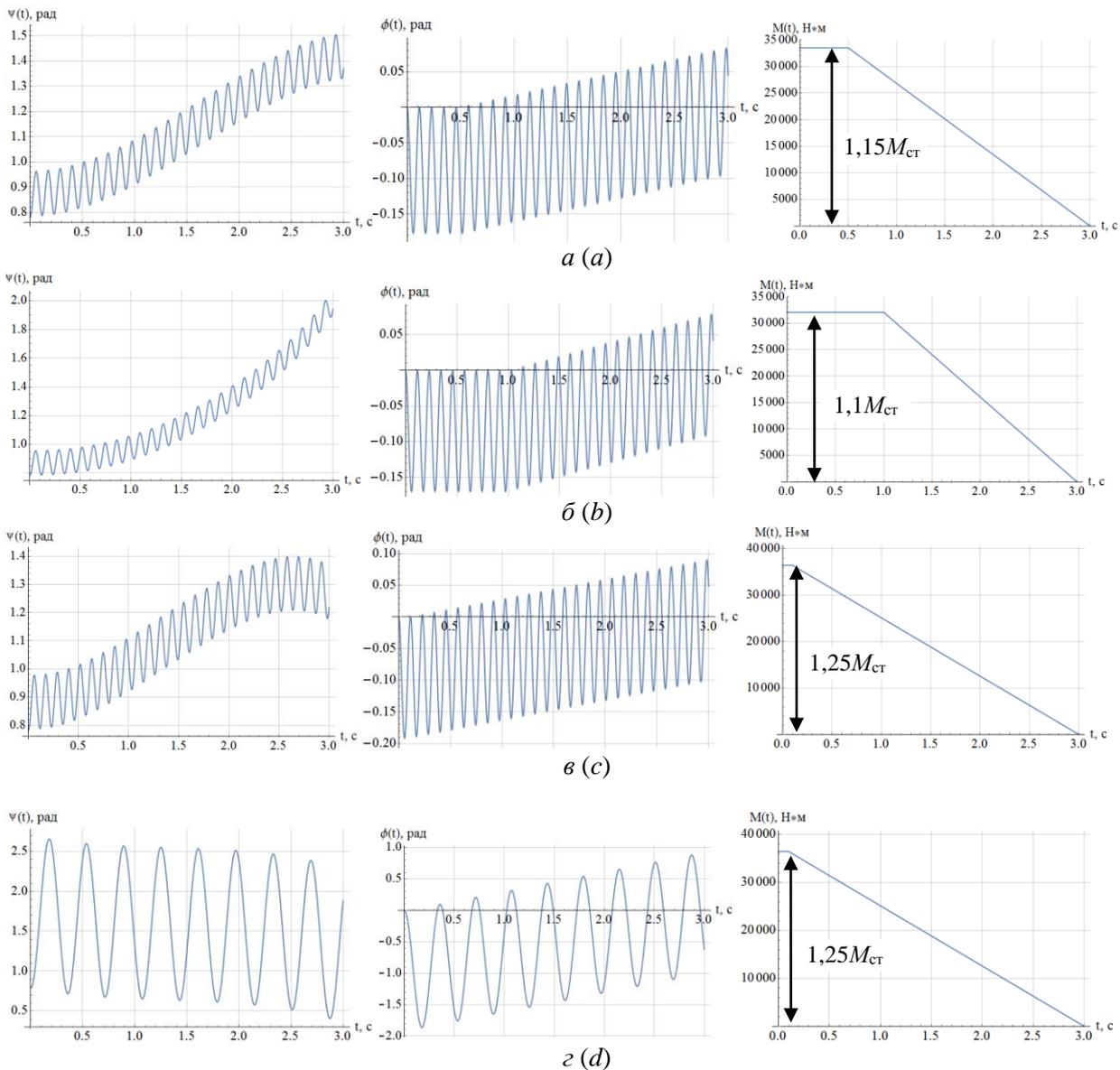
демпфирующих свойств привода, однако представленные результаты дают понять картину динамики поведения механической системы при работе с учетом податливости ее звеньев. Из Рис. 3, *а* видно, что при воздействии на стреловую систему манипулятора приводного постоянного момента, который превышает статический для заданного положения стрелы на 5% осуществляет-

ся ее перемещение из положения  $45^\circ$  в положения  $137^\circ$  за 3 с, а при воздействии момента такого же номинала на протяжении 1 с (см. Рис. 3, *б*) заставляет стрелу двигаться из положения  $45^\circ$  в положение  $55^\circ$  за 2 с, после чего стрела начинает обратное движение вследствие недостаточной величины внешнего приводного момента.



**Рис. 3.** Графики изменения угла поворота стрелы  $\psi$ , угла качания опорной рамы  $\phi$  и приводного момента  $M$  при жесткости опорной стойки  $c = 1 \cdot 10^6$  Н/м: *а* – для постоянного приводного момента; *б*, *в* – для изменяемого приводного момента с постоянным воздействием на протяжении 1 с; *г* – для изменяемого приводного момента с постоянным воздействием на протяжении 0,5 с;  $M_{ст}$  – момент статического равновесия системы

**Fig. 3.** The graphs of the change in the angle  $\psi$  of the boom rotation, the swing angle  $\phi$  of the support frame and the driving moment  $M$  with the rigidity of the support  $c = 1 \cdot 10^6$  N/m: *a* – for a constant driving torque; *b*, *c* – for a variable drive torque with a constant impact for 1 s; *d* – for a variable drive torque with a constant impact for 0,5 s;  $M_{ст}$  it the moment of static equilibrium of the system

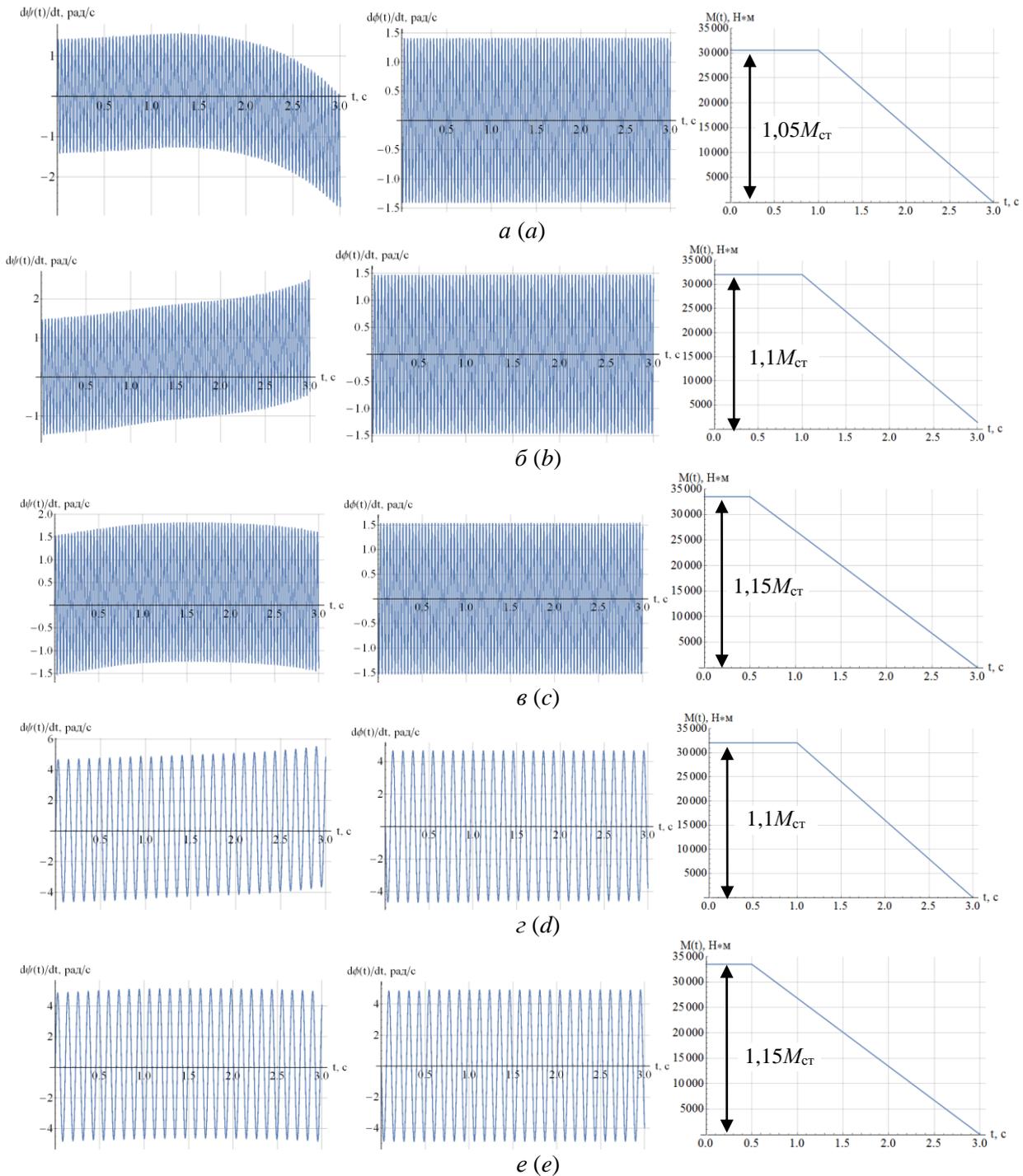


**Рис. 4.** Графики изменения угла поворота стрелы  $\psi$ , угла качания опорной рамы  $\phi$  и приводного момента  $M$ : *a* – для изменяемого приводного момента с постоянным воздействием на протяжении 0,5 с при жесткости опорной стойки  $c = 1 \cdot 10^5$  Н/м; *b* – для изменяемого приводного момента с постоянным воздействием на протяжении 1 с при жесткости опорной стойки  $c = 1 \cdot 10^5$  Н/м; *в* – для изменяемого приводного момента с постоянным воздействием на протяжении 0,1 с при жесткости опорной стойки  $c = 1 \cdot 10^5$  Н/м; *г* – для изменяемого приводного момента с постоянным воздействием на протяжении 0,1 с при жесткости опорной стойки  $c = 1 \cdot 10^4$  Н/м;  $M_{ст}$  – момент статического равновесия системы

**Fig. 4.** The graphs of the change the angle  $\psi$  of the boom rotation, the swing angle  $\phi$  of the support frame and the driving moment  $M$ : *a* – for a variable driving moment with a constant impact for 0,5 s with the rigidity of the support frame  $c = 1 \cdot 10^5$  N/m; *b* – for a variable driving moment with a constant impact for 1 s with a support rack stiffness  $c = 1 \cdot 10^5$  N/m; *c* – for a variable driving torque with a constant impact for 0,1 s with a support rack stiffness  $c = 1 \cdot 10^5$  N/m; *d* – for a variable driving moment with a constant effect for 0,1 s with a support rack stiffness  $c = 1 \cdot 10^4$  N/m;  $M_{ст}$  it is the moment of static equilibrium of the system

Для сравнения кинематических характеристик рассматриваемой механической системы на Рис. 5 представлено графики изменения скорости угла между стрелой и опорной рамой, а также угла качания опор-

ной рамы для рассмотренных вариантов внешнего воздействия приводного момента и разной жесткости упругого опорного элемента.

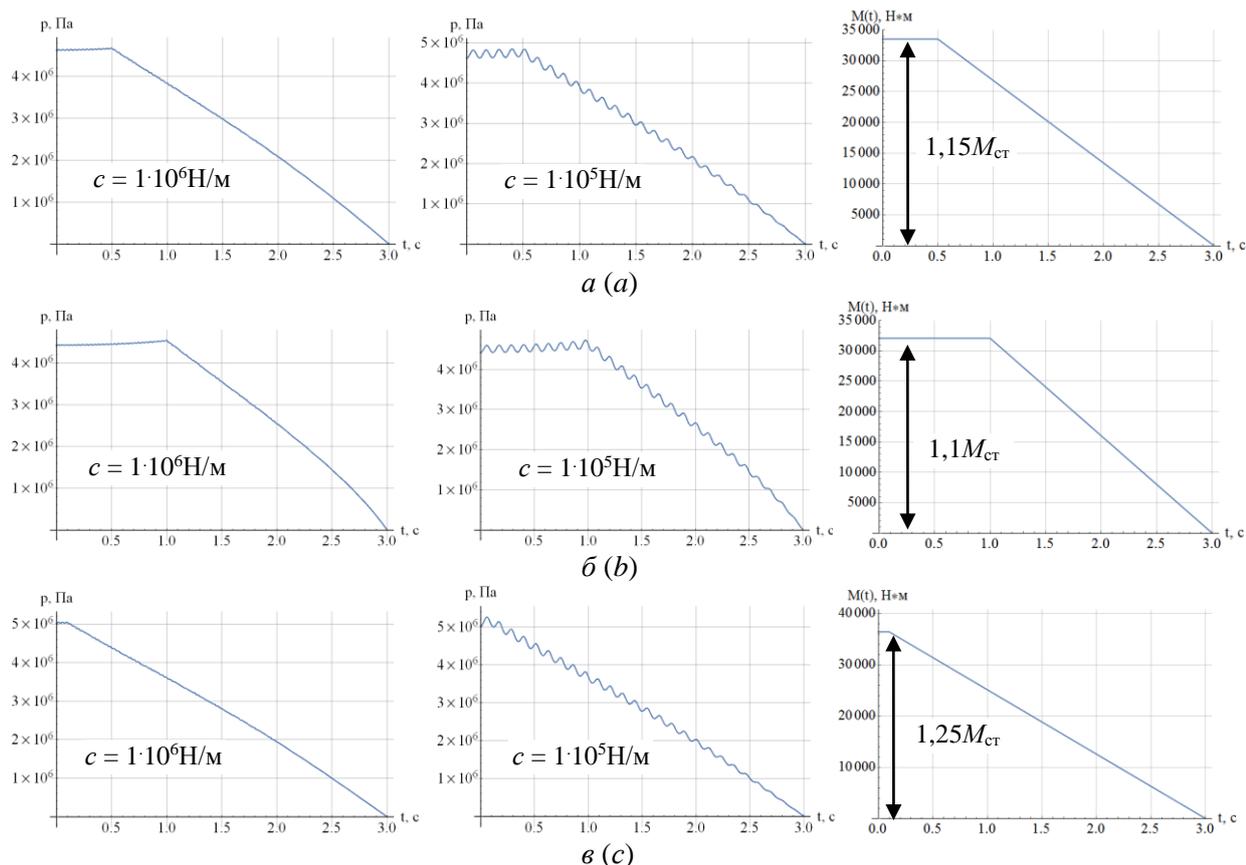


**Рис. 5.** Графики изменения скоростей угла поворота стрелы  $\psi$  и угла качания опорной рамы  $\phi$  при действии приводного момента  $M$  разной продолжительности:  $a, б, в$  – для жесткости опорной стойки  $c = 1 \cdot 10^6$  Н/м;  $г, e$  – для жесткости опорной стойки  $c = 1 \cdot 10^5$  Н/м

**Fig. 5.** Graphs of speed changes of the rotation angle of the boom  $\psi$  and the swing angle of the support frame  $\phi$  under the action of the different durations drive moment  $M$ :  $a, b, c$  – for the rigidity of the support post  $c = 1,10^6$  N/m;  $d, e$  – for the rigidity of the support post  $c = 1,10^5$  N/m

Как видно из представленных графиков на Рис. 5, изменение жесткости опорного элемента на порядок приводит к изменению максимальной амплитуды

колебаний скорости в 2,7 раза, а частоты – в 3 раза, при этом характер колебаний практически не изменяется.



**Рис. 6.** Графики изменения давления в системе управления приводным гидроцилиндром для разной жесткости упругой опоры и внешнего приводного момента для следующих параметров системы:  $S = 0,00785 \text{ м}^2$ ;  $a_1 = 1 \text{ м}$ ;  $a_2 = 1 \text{ м}$ : *a* – при действии момента равного  $1,15M_{\text{ст}}$  на протяжении  $0,5 \text{ с}$ ; *b* – при действии момента равного  $1,1M_{\text{ст}}$  на протяжении  $1 \text{ с}$ ; *c* – при действии момента равного  $1,25M_{\text{ст}}$  на протяжении  $0,1 \text{ с}$

**Fig. 6.** The graphs of change pressure in the control system of the hydraulic drive cylinder for different rigidity of the elastic support and external drive moment for the following system parameters:  $S = 0,00785 \text{ м}^2$ ;  $a_1 = 1 \text{ м}$ ;  $a_2 = 1 \text{ м}$ : *a* – under the action of a moment equal to  $1,15M_{\text{ст}}$  for  $0,5 \text{ s}$ ; *b* – under the action of a moment equal to  $1,1M_{\text{ст}}$  for  $1 \text{ s}$ ; *c* – under the action of a moment equal to  $1,25M_{\text{ст}}$  for  $0,1 \text{ s}$

Из уравнения (4) найдем давление в приводном гидроцилиндре манипулятора:

$$p = \frac{M \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\alpha - \varphi)}}{Sa_1a_2 \sin(\alpha - \varphi)}. \quad (5)$$

Подставляя в полученную зависимость (5) найдены ранее законы движения по Рис. 3 и Рис. 4, построено графики изменения давления в гидравлической системе управления (см. Рис. 6).

### ВЫВОДЫ

Разработана уточненная математическая модель стреловой системы манипу-

лятора с упругим основание позволяет определять законы управления рассмотренной системы манипулятора. В представленной системе манипулятора приводной момент является основным управляемым воздействием, влияющим на величину колебательных процессов, возникающих в упругом основании.

Увеличение жесткости упругого основания, как и ожидалось, позволяет снизить амплитуду колебаний, но не убрать их полностью. Также полученные результаты дают представление того как в стреловой системе манипулятора проходят колебательные процессы, возникающие от действия приводных усилий привода.

В дальнейшем для оптимизации движений рассмотренной стреловой системы манипулятора, необходимо особое внимание уделять приводному моменту.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Ловейкін В. С.** Експериментальне дослідження динаміки руху штока гідроциліндра підйому шарнірно-зчленованої стрілової системи крана-манипулятора з гідроприводом / В. С. Ловейкін, Д. О. Міщук // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. – 2011. – № 78. – С. 28-34.
2. **Міщук Д. О.** Дослідження динамічної моделі гідролічного циліндра об'ємного гідроприводу / Д. О. Міщук // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. – 2016. – № 87. – С. 74-81.
3. **Ловейкін В. С., Ромасевич Ю. О.** Результати експериментальних досліджень динаміки переміщення стрілової системи крана-манипулятора за умови одночасного переміщення рукояті та телескопічної секції / В. С. Ловейкін, Ю. О. Ромасевич, О. О. Сподоба, М. О. Сподоба // Збірник тез доповідей ХХ Міжнародної конференції науково-педагогічних працівників, наукових співробітників та аспірантів «Проблеми та перспективи розвитку технічних та біоенергетичних систем природокористування: конструювання та дизайн». – Київ, – 2020. – С. 84-93.
4. **Ловейкін В. С.** Оптимізація режимів зміни вильоту манипулятора з гідроприводом. Монографія / В. С. Ловейкін, Д. О. Міщук. – К.: ЦП «Компринт», – 2013. – 206 с.
5. **Лагєрев И. А.** Комплексная математическая модель манипуляционной системы мобильной транспортно-технологической машины / И. А. Лагєрев // МИР ТРАНСПОРТА. – 2017, – Том 15, – № 1, – С. 28–39.
6. **Cekus, D.** The dynamic analysis of load motion during the interaction of wind pressure / D. Cekus, P. Kwiaton, & T. Geisler // Meccanica, – 2021. – No.56, – P. 785–796. <https://doi.org/10.1007/s11012-020-01234-x>.
7. **Krastanov K.** About the safety by using of mobile cranes / K. Krastanov // ICONTES2017: International Conference on Technology, Engineering and Science. The Eurasia Proceedings of Science, Technology, Engineering & Mathematics (EP-STEM). – 2017. – Vol.1, P. 213-217.
8. **Jeng Shyr-Long.** Outrigger Force Measure for Mobile Crane Safety Based on Linear Programming Optimization / Jeng Shyr-Long, Yang Chia-Feng & Chieng Wei-hua // Mechanics Based De-

- sign of Structures and Machines. – 2010. – Vol.38. – pp. 145-170. <https://doi.org/10.1080/15397730903482702>.
9. **Kalyoncu M.** Mathematical modelling and dynamic response of a multi-straight-line path tracing flexible robot manipulator with rotating-prismatic joint / M. Kalyoncu // Applied Mathematical Modelling. – 2008. – Vol. 32, Issue 6. pp. 1087-1098.
  10. **Міщук Д. О.** Дослідження динаміки роботи встановленого на пружну опору стрілового манипулятора / Д. О. Міщук // Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. – 2017. – № 90. – С. 11-18.
  11. **Romanello G.** A graphical approach for the determination of outrigger loads in mobile cranes. Mechanics Based Design of Structures and Machines / G. Romanello, (2020) P. 1-14 (online). <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1726184>.
  12. **Ловейкин В. С.** Синтез оптимального динамического режима движения стрелы манипулятора, установленного на упругом основании / В. С. Ловейкин, Д. А. Мищук // Наука и техника. – 2019. – Том 18, No 1. – С. 55-61

#### REFERENCES

1. **Loveykin V. S., Mischuk D. O.** (2011). Experimental study of the dynamics of the movement of the rod of the hydraulic cylinder of the lifting hinged-jointed column system of the crane-manipulator with a hydraulic drive. *Girnychi, budivelni, dorozhni ta melioratyvni mashyny [Mining, construction, road and melioration machines]*, No78, 28-34.
2. **Mischuk D. O.** (2016). Study of the dynamic model of the hydraulic cylinder of a volume hydraulic drive. *Girnychi, budivelni, dorozhni ta melioratyvni mashyny [Mining, construction, road and melioration machines]*, No87, 74-81.
3. **Loveykin V. S., Romasivich Yu., O., Spodoba O. O., Spodoba M. O.** (2020). Results of experimental studies of the dynamics of movement of the jib system of the manipulator crane under the condition of simultaneous movement of the handle and the telescopic section. *Collection of abstracts of reports of the XX International Conference of Scientific and Pedagogical Workers, Research Associates and Postgraduate Students "Problems and Prospects of the Development of Technical and Bioenergy Systems of Nature Utilization: Construction and Design"*, 84-93.
4. **Loveykin V. S., Mischuk D. O.** (2013). Optimization of the modes of changing the departure of the manipulator with a hydraulic drive. *Monograph, Kyiv, CP Komprint, 206.*

5. **Lagerev I. A.** (2017). Complex mathematical model of the manipulation system for mobile transport-technological machine. *MIR TRANSPORT*, Vol15, No1, 28–39.
6. **Cekus, D., Kwiaton P., & Geisler T.** (2021). The dynamic analysis of load motion during the interaction of wind pressure. *Meccanica*, No.56, 785–796. <https://doi.org/10.1007/s11012-020-01234-x>.
7. **Krastanov K.** (2017). About the safety by using of mobile cranes. *ICONTE2017: International Conference on Technology, Engineering and Science. The Eurasia Proceedings of Science, Technology, Engineering & Mathematics (EPSTEM)*, Vol.1, 213-217.
8. **Jeng Shyr-Long, Yang Chia-Feng & Chieng Wei-hua.** (2010). Outrigger Force Measure for Mobile Crane Safety Based on Linear Programming Optimization. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol.38. 145-170. <https://doi.org/10.1080/15397730903482702>.
9. **Kalyoncu M.** (2008). Mathematical modelling and dynamic response of a multi-straight-line path tracing flexible robot manipulator with rotating-prismatic joint. *Applied Mathematical Modelling*, Vol.32, Issue 6, 1087-1098.
10. **Mishchuk D. O.** (2017). Study of the dynamics of the boom manipulator mounted on an elastic support. *Girnychi, budivelni, dorozhni ta melioratyvni mashyny [Mining, construction, road and melioration machines]*, No90, 11-18.
11. **Romanello G.** (2020). A graphical approach for the determination of outrigger loads in mobile cranes. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 1-14 (online). <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1726184>.
12. **Loveykin V. S., Mischuk D. O.** (2019). Synthesis of the optimal dynamic mode of movement of the

manipulator boom mounted on an elastic base. *Science and technology*, Vol18, No 1, 55-61.

**Analysis of the refined mathematical model of the manipulator boom system with an elastic base**

*Vyacheslav Loveikin<sup>1</sup>, Dmitriy Mishchuk<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine*

<sup>2</sup>*Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine*

**Abstract.** This study was proposed a refined mathematical model of the boom system of the manipulator, which makes it possible to study the dynamics of the manipulator robot, taking into account the compliance of the elastic base due to its deformation. The mathematical model based on the Lagrange equations of the second kind for a mechanical system with two degrees of freedom, and the angle of rotation of the manipulator boom relative to the horizontal surface and the swing angle of the support frame was took as generalized coordinates. The purpose of this study was to analyze the behavior of the boom system of the manipulator on the effect of the drive torque from the hydraulic drive system and to obtain the kinematic characteristics of the generalized coordinates and amplitudes of oscillations of the compliant support link.

**Keywords:** dynamics, manipulator, dynamic model, differential equation, vibrations, elastic support, boom system.